Guida alla lettura del grafico di una funzione

Obiettivo finale del nostro studio sarà la costruzione del grafico cartesiano della funzione rappresentata analiticamente da un'equazione data $y = f(x)$. Tale grafico è costituito da *tutti* i punti di coordinate $(x; y)$, in cui in ogni coppia il valore di y è legato al valore di x tramite l'uguaglianza $y = f(x)$ che descrive la funzione stessa.

Per arrivare a questo risultato sarà necessario ricavare *a partire dall'equazione* $y = f(x)$ *[unico dato del problema!!!]* una serie di informazioni che, riportate ed interpretate correttamente sul piano cartesiano, consentiranno alla fine di costruire il grafico completo con il maggior grado di precisione possibile.

Per meglio comprendere quali siano le informazioni utili al nostro scopo è opportuno affrontare in una prima fase il procedimento inverso, ossia partire da un grafico assegnato e ricavare da esso, mediante una corretta *lettura* del grafico stesso, le informazioni essenziali che lo caratterizzano.

Tali informazioni sono, sia pur grossolanamente, così schematizzabili:

1. Dominio [insieme dei valori di x in corrispondenza dei quali esiste $y = f(x)$]. In pratica, procedendo *da sinistra verso destra*, si cercano i valori di x in corrispondenza dei quali la retta *verticale* relativa all'ascissa x interseca il grafico dato (in *un* punto). In generale, il dominio sarà espresso mediante l'unione di intervalli (aperti o chiusi, limitati o illimitati); es.: $]-\infty; x_1] \cup [x_2; x_3[\cup]x_4; +\infty[$.

2. Codominio (insieme dei valori che la y assume). In pratica, procedendo *dal basso verso l'alto*, si cercano i valori di y in corrispondenza dei quali la retta *orizzontale* relativa all'ordinata y interseca il grafico dato (in *uno o più* punti). In generale, il codominio sarà espresso mediante l'unione di alcuni intervalli, come nel caso del dominio; es.: $]-\infty; y_1] \cup]y_2; y_3[\cup [y_4 : +\infty[$.

3. Intersezioni con gli assi. È opportuno evidenziare gli *eventuali* punti in cui il grafico interseca l'asse x [non è detto che ce ne siano: in caso positivo, avranno coordinate del tipo $(a; 0)$] e l'*eventuale* punto in cui interseca l'asse y [se esiste, esso è evidentemente unico ed avrà coordinate del tipo $(0; b)$].

4. Comportamento della funzione agli estremi del dominio, da descrivere mediante il concetto di *limite*: muovendosi *lungo il grafico*, a quale valore si avvicina y quando x si avvicina a ciascuno dei valori di "confine" evidenziati al punto 1? (si tenga presente che questi "valori", sia per x che per y, possono essere sostituiti dai simboli $-\infty$ e $+\infty$).

5. Eventuali asintoti orizzontali e/o verticali.

   Si avrà un asintoto orizzontale di equazione $y = a$ ogni volta che (vedi punto precedente):

   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

   Si avrà un asintoto verticale di equazione $x = b$ ogni volta che (vedi punto precedente):

   $$\lim_{x \to b^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

   N.B. Esiste anche la possibilità di avere un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, ma per il momento non prendiamo in considerazione questo caso.

6. Segno della funzione.

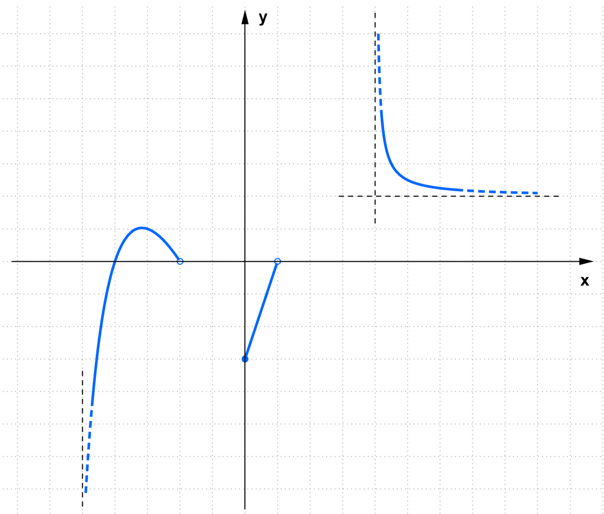
   Si tratta di evidenziare i valori di x per i quali risulta $f(x) \geq 0$, ovvero, in pratica, i valori di x in corrispondenza dei quali il grafico si trova *sopra* l'asse x. Anche in questo caso, in generale, l'insieme cercato sarà descritto come unione di intervalli aperti o chiusi (come nel caso del dominio). Resta sottinteso (e quindi è inutile descriverlo) che si avrà $f(x) < 0$ dove la funzione esiste e non è positiva o nulla.

7. Andamento crescente o decrescente.
   Si tratta di evidenziare i valori di x per i quali il grafico presenta un andamento crescente, ossia, *procedendo da sinistra verso destra*, si vede che "sale" dal basso verso l'alto. Nel seguito si daranno definizioni più precise e articolate del concetto in questione; in questa sede ci si limita a questa descrizione piuttosto intuitiva.

8. Estremi relativi e/o assoluti.

   Si tratta di evidenziare gli eventuali punti che rappresentano "il punto più basso" ovvero "il punto più alto" di *tutto* il grafico (estremi *assoluti* o *globali*) ovvero di una sua parte (estremi *relativi* o *locali*). È necessario precisare che, nel caso di estremi relativi, si intende che la "parte" del grafico cui ci si riferisce deve corrispondere a un *intervallo* di valori di x che comprenda *al suo interno* il valore corrispondente al massimo o al minimo.

Esempio di lettura di un grafico



1. Dominio: $]-5;-2[\,\cup\,[0;1[\,\cup\,]4;+\infty[$

2. Codominio: $]-\infty;1]\cup\,]2;+\infty[$

3. Intersezioni con gli assi: il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x nel punto $(-4;0)$ e l'asse y nel punto $(0;-3)$. [N.B.: i punti $(-2;0)$ e $(1;0)$ *non* sono punti del grafico e quindi non possono essere considerati intersezioni con gli assi.]

4. Comportamento della funzione agli estremi del dominio:
$$\lim_{x\to-5^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = -3$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to4^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$
   N.B.: i seguenti limiti *non esistono* (e non è quindi necessario considerarli):
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) \qquad \lim_{x\to4^-} f(x)$$

5. Asintoti: il grafico presenta l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ e gli asintoti verticali di equazione $x = -5$ e $x = 4$.

6. Segno.
$$f(x) \geq 0 \text{ in } [-4;2[\,\cup\,]4;+\infty[$$

7. La funzione è crescente in $]-5;-3]\ \cup\ [0;1[$

8. Estremi relativi/assoluti: la funzione presenta un massimo relativo nel punto $(-3;1)$; non presenta minimi relativi e neppure estremi assoluti. [N.B.: il punto $(0;-3)$ non è considerato minimo relativo in quanto la funzione esiste soltanto nei punti a destra di $x = 0$ e non a sinistra; si tenga tuttavia presente che, qualora non fosse presente la parte di grafico compresa nel II e III quadrante, il punto stesso acquisirebbe il ruolo di minimo assoluto per la funzione.]