http://dida.fauser.edu/matetri/valsecchi/goniometria/sencosangacuti.htm

SENO COSENO E TANGENTE DI ANGOLI ACUTI

Un angolo e' acuto se piu' piccolo di un angolo retto.

Dato l'angolo acuto α di vertive **V**,

consideriamo su uno dei due lati vari punti P_1, P_2, P_3, P_4, ...

proiettiamo tali punti sull'altro lato ottenendo rispettivamente i punti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,........

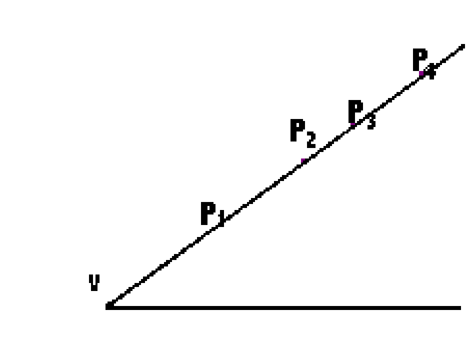


Fig 1

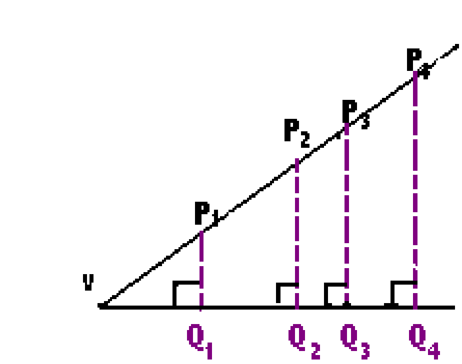


Fig 2

Si ottengono cosi' vari triangoli rettangoli: P_1VQ_1; P_2VQ_2; P_3VQ_3; P_4VQ_4 ....ecc.

Essi sono tutti simili tra loro avendo i tre angoli rispettivamente uguali (l'angolo di vertice V in comune, gli angoli retti nei vertici Q e quindi anche gli angoli di vertici P uguali)

Ma come si sa, **i triangoli simili hanno i lati corrispondenti direttamente proporzionali**;

usando la linea di frazione invece del simbolo di divisione normalmente utilizzato per le proporzioni , si puo' scrivere

$$\frac{P_1Q_1}{VP_1} = \frac{P_2Q_2}{VP_2} = \frac{P_3Q_3}{VP_3} = \frac{P_4Q_4}{VP_4} = \ldots\ldots = s\,(\text{numero reale})$$

$$\frac{V_1Q_1}{VP_1} = \frac{V_2Q_2}{VP_2} = \frac{V_3Q_3}{VP_3} = \frac{V_4Q_4}{VP_4} = \ldots\ldots = c\ \ (\text{numero reale})$$

$$\frac{P_1Q_1}{VQ_1} = \frac{P_2Q_2}{VQ_2} = \frac{P_3Q_3}{VQ_3} = \frac{P_4Q_4}{VQ_4} = \ldots\ldots = t\ \ (\text{numero reale})$$

I valori di ***s, c, t*** non dipendono da come si sceglie il punto P sul lato dell'angolo (infatti la posizione di P_1, P_2, P_3, P_4, ... e' casuale), ma solo dalla ampiezza dell'angolo α che che si considera.

Per definizione,

s e' il seno dell'angolo α , sen α = ***s***

c e' il coseno dell'angolo α , cos α = ***c***

t e' la tangente dell'angolo α , tang α = ***t***

ESERCIZI

1. Disegna alcuni angoli, quindi con righello e calcolatrice determina il loro seno, il loro coseno e la loro tangente.
2. Osservando anche i risultati dell'esercizio precedente sapresti dire quali valori puo' assumere il seno di un angolo acuto? E il coseno ? E la tangente? Motiva le risposte.
3. Disegna un angolo acuto il cui seno vale:

0,5	0,25	0,75

4. Disegna un angolo acuto il cui coseno valga :

0,5	0,25	0,75

5. Disegna un angolo acuto la cui tangente sia:

0,5	2	5

SENO COSENO E TANGENTE DI ANGOLI DI 30°, 45°, 60°

Angoli di 30° e 60°

Esaminiamo il triangolo rettangolo con gli angoli acuti di 30° e 60° ,

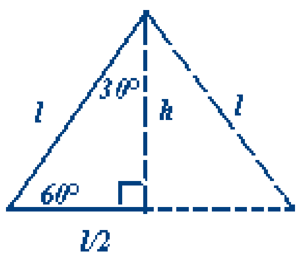
esso puo' essere pensato come una delle due parti simmetriche in cui l'altezza divide un triangolo equilatero di lato ***l***.

Se si indica con ***l*** l'ipotenusa,

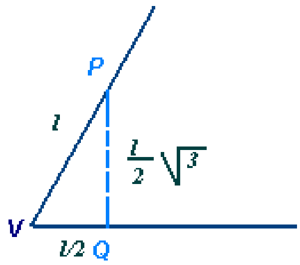
il cateto minore, opposto all'angolo di 30°, sara' ***l***/2

e applicando il teorema di Pitagora, il cateto maggiore , opposto all'angolo di 60° e'

$\frac{l}{2}\sqrt{3}$



Per determinare i valori di sen 60° , cos 60°, tang 60°, disegniamo un angolo di 60°, quindi preso un punto P su uno dei due lati lo proiettiamo sull'altro lato in Q e applichiamo le definizioni del paragrafo precedente:



$$\text{sen } 60° = \frac{PQ}{VP} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{l} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{VQ}{VP} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tang} 6\,0° = \frac{PQ}{VQ} = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{3}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{3}$$

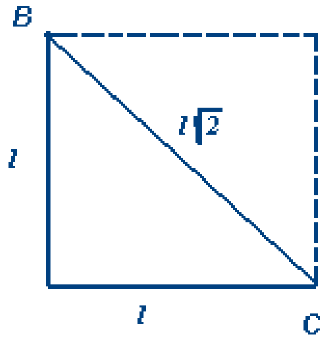
Considerando quanto detto fino ad ora e rappresentando un angolo di 30°, e' semplice rendersi conto che :

$$\text{sen } 30 = \frac{1}{2}$$

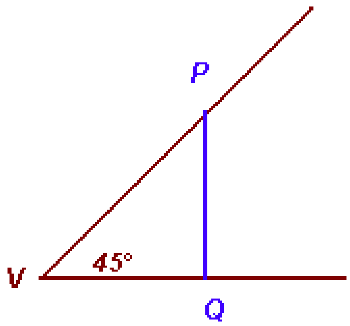
$$\cos 30 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\text{tang } 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Angolo di 45°

Consideriamo un triangolo rettangolo con i due angoli acuti di 45°. Esso puo' essere pensato come una delle due parti in cui la diagonale divide un quadrato. Esso ha i due cateti uguali di misura ***l*** e con il teorema di Pitagora si calcola l'ipotenusa che misura $l\sqrt{2}$	

Per determinare seno, coseno e tangente dell'angolo di 45°, si rappresenta un angolo di 45°, si sceglie un punto P su di un lato e lo si proietta in Q sull'altro lato:



Il triangolo rettangolo VPQ gode delle proprieta' appena ricordate, quindi:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{PQ}{VP} = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

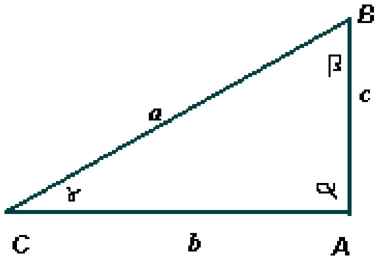
$$\cos 45° = \frac{VQ}{VP} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tang} 45° = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{VQ}} = \frac{l}{l} = 1$$

I TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

Dalle definizioni che sono appena state date di seno, coseno e tangente di un angolo acuto, si ottengono tre teoremi importantissimi sui triangoli rettangoli che si affiancano al noto teorema di Pitagora, al Primo Teorema di Euclide e al Secondo Teorema di Euclide. I nuovi teoremi, permettono di determinare tutti gli elementi di un triangolo rettangolo,(i suoi tre lati e i suoi angoli), quando sono noti due elementi di cui almeno uno sia un lato.

Rappresentiamo un triangolo rettangolo con l'angolo retto di vertice A e misura α ,l'angolo di vertice B di misura β , l'angolo con vertice in C di misura γ . Il lato opposto all'angolo di vertice A si chiama ***a***, il lato opposto al vertice C si chiama ***c*** e quello opposto al vertice B si chiama ***b*** opposto



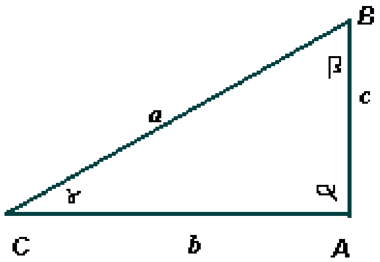
Ricordando le definizioni di seno, coseno e tangente date in precedenza si ottiene:

sen $\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$	sen $\gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$
cos $\gamma = \frac{CB}{BC} = \frac{b}{a}$	cos $\beta = \frac{CA}{BC} = \frac{c}{a}$
tang $\gamma = \frac{BA}{CA} = \frac{c}{b}$	tang $\beta = \frac{CA}{BA} = \frac{b}{c}$

Dando denominatore comune si ottengono i tre teoremi sul triangolo rettangolo:

$b = a$ sen β	$c = a$ sen γ	In un triangolo rettangolo, il cateto e' uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto ad esso
$b = a \cos \gamma$	$c = a \cos \beta$	In un triangolo rettangolo il cateto e' uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente ad esso
$c = b$ tang γ	$b = c$ tang β	In un triangolo rettangolo il cateto e' uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto

Esempio n 1



Un triangolo ABC, rettangolo in A, ha l'ipotenusa che misura 10 cm e un cateto che misura 5 cm, risolvere il triangolo determinando tutti gli elementi mancanti.

Dati Incognite

$\alpha = 90°$ b, β, γ

$a = 10$ cm

c = 5 cm

sen $\gamma = c / a = 5 / 10 = 1/2$, ma l'angolo acuto il cui seno e' 1/2 misura 30°, quindi $\gamma = 30°$.

Poiche' i due angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari $\beta = 90° - \gamma = 60°$

$b = a \cos \gamma = 10 \cos 30°$ quindi:

$$b = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ cm$$

Esempio n 2

In un triangolo rettangolo, i cateti misurano 15 cm e $15\sqrt{3}$ cm . Determinare gli elementi mancanti del triangolo.

Dati Incognite

$\alpha = 90°$ $a\ \beta, \gamma$

$c = 15\sqrt{3}$ cm

b = 15 cm

$$\text{tang } \gamma = \frac{c}{b} = \frac{15\sqrt{3}}{15} = \sqrt{3}$$

l'angolo acuto che ha per tangente tale valore e' quello di 60°, quindi

$\gamma = 60°$, allora $\beta = 90° - \gamma = 30°$

l'ipotenusa e' uguale al cateto diviso per il seno dell'angolo opposto a tale cateto:

$a = b$ / sen β = 15 / sen 30° = 15 / 1/2 = 30 cm