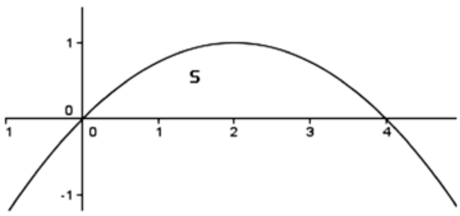
Le applicazioni degli integrali al calcolo di aree e volumi nelle prove di maturità

Angelo Ambrisi

Ne plus ultra. Non si va oltre! Gli integrali costituiscono le colonne d'Ercole dell'insegnamento della matematica nei licei scientifici. In tutte le classi quinte il lavoro del mese di maggio è sugli integrali. Prima l'integrale indefinito e poi quello definito e le sue applicazioni al calcolo di aree e volumi.

Da alcuni anni, le tracce hanno rivolto una notevole attenzione a questa applicazione fondamentale del calcolo degli integrali. L'anno d'inizio è stato il 2005.

In uno dei problemi assegnati agli esami di stato di quell'anno per gli indirizzi sperimentali di PNI e Brocca, si chiedeva, data la regione S racchiusa tra l'arco della parabola d'equazione $x^2 = 4(x - y)$ e l'asse x, di determinare ***il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati***.

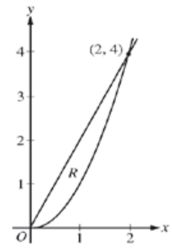


La soluzione è data dall'integrale: $\displaystyle\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)^2 \mathrm{d}x.$

Il quesito comportava un'indubbia novità, non nella sostanza, ovviamente, quanto nella formulazione, una certa abilità nell'immaginare il solido di base S e nel vederne il volume costituito da "fette" quadrate. In definitiva una significativa applicazione del noto principio di ***Cavalieri***. Non pochi docenti nei loro commenti sul sito Matmedia (`www.matmedia.it`) furono dell'opinione che con quel quesito si "**richiedeva il calcolo di un volume mediante un procedimento non previsto nei programmi del liceo scientifico**" e tutti lamentarono, comunque, che **non se ne trovava traccia nei libri di testo**. E così infatti è ancora oggi, se non con poche eccezioni.

Da allora la questione è stata annualmente riproposta con diverse formulazioni e variando la forma delle sezioni: rettangoli, triangoli equilateri, semicerchi. Ad esempio nel problema proposto nella recente sessione 2011[1] non si dice che le sezioni sono rettangoli di altezza $5-x$ ma bisogna dedurlo dal fatto che tutti i punti a distanza x dall'asse y hanno la stessa profondità. In un altro quesito, invece, non si è data la forma della sezione ma direttamente la misura dell'area. Ecco il quesito:

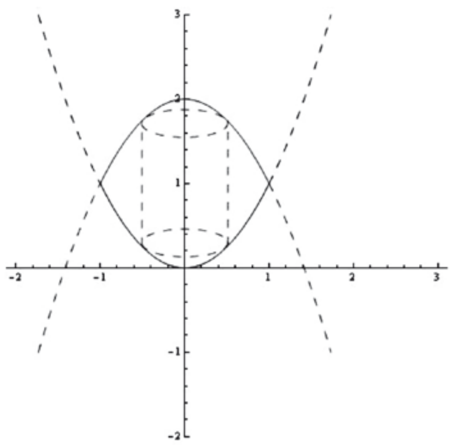
> La regione R è delimitata da $y=2x$ e $y=x^2$ come mostrato nella figura a lato. R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno area $A(x)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x$. Si determini il volume di W.
>
> (Scuole all'Estero, 2011)



Ovviamente la soluzione, immediata, è: $\int_0^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\,\mathrm{d}x$.

Le tracce degli esami di Stato conclusivi dei licei scientifici hanno toccato anche un'altra significativa variazione al tema delle applicazioni degli integrali al calcolo dei volumi. La variazione consiste nel vedere il volume di un solido costituito come una cipolla, a strati o gusci o sfoglie cilindriche. Un modo di vedere del quale non può sfuggire l'importanza didattica al fine di favorire, negli allievi, il potenziamento sia delle capacità di spazializzazione sia della padronanza del concetto stesso di integrale.

A spiegarne il modo di procedere valga il ragionamento seguente. Si consideri la regione S delimitata dalle curve $y=2-x^2$ e $y=x^2$, con x in [0,1] e la sua rotazione intorno all'asse y



[1] La traccia è riportata sulla 4ˆ di copertina di questo fascicolo del PdM.

Fissata l'attenzione su una striscia verticale di S, questa, nella rotazione cui S è sottoposta, descrive un cilindro. Poiché ogni striscia è un rettangolo infinitesimale, lo spessore del cilindro che ne risulta sarà davvero esiguo, ma pur sempre reale. Quindi se si calcolano le superfici di questi cilindri e si sommano i volumi infinitesimali, si ottiene il volume del solido descritto da S nella sua rivoluzione attorno all'asse y.

La visualizzazione non è facile, ma è utile per costruire l'integrale.

Tenuto conto che la superficie laterale di un cilindro è data da $2\pi rh$, che l'altezza del cilindro è pari alla lunghezza della striscia verticale, $(2-x^2)-x^2 = 2-2x^2$ e che il raggio della striscia è x, si ottiene:

$$2\pi \int_0^1 x(2-2x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 (2x-2x^3)\,\mathrm{d}x = 2\pi \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \pi$$

Se, invece, si dovesse optare per dividere la regione S in strisce orizzontali e utilizzare i cerchi sezione per il calcolo del volume del solido da essa descritto, la soluzione sarebbe stata meno rapida, con molti più integrali da individuare e calcolare. Il metodo delle "superfici" o "sfoglie cilindriche" evita questa complicazione e porta rapidamente alla soluzione.

Da un punto di vista generale, se abbiamo una regione la cui area è limitata superiormente dalla curva $y = f(x)$ ed inferiormente dalla curva $y = g(x)$, sull'intervallo $[a,b]$, allora ogni cilindro avrà altezza $f(x) - g(x)$, raggio x e superficie laterale $2\pi x[f(x) - g(x)]$.

Per trovare il volume si calcola allora l'integrale

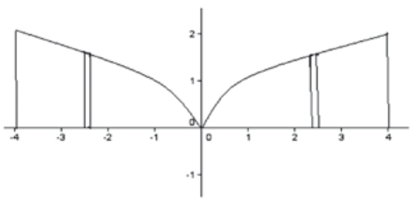
$$2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

Questa è la formula per trovare il volume utilizzando le superfici cilindriche quando la regione è ruotata intorno all'asse y. Un esempio di elevata immediatezza è il seguente

Esempio 1: Si trovi il volume della regione delimitata dalla curva $y = \sqrt{x}$ dall'asse x e dalla retta $x = 9$, ruotata intorno all'asse y.

Dal disegno si ricava che i limiti di integrazione sono $x = 0$ e $x = 4$ e che ogni striscia verticale è limitata dalla curva $y = \sqrt{x}$ e dall'asse x ($y = 0$).

Si deve, quindi, calcolare l'integrale



$$2\pi \int_0^4 x\left(\sqrt{x} - 0\right)\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^4 x\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

Il quesito è stato proposto lo scorso anno con due modalità diverse.

ORDINAMENTO: *Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.*

PNI-Brocca: *Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. L'integrale*

$$\int_0^4 2\pi x \left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$$

fornisce il volume del solido:

A) generato da R nella rotazione intorno all'asse x
B) generato da R nella rotazione intorno all'asse y
C) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$
D) nessuno di questi

Si motivi esaurientemente la risposta.

Inutile dire che il quesito, specie in quest'ultima formulazione, è risultato difficile ma ha anche destato interesse. E tali sono risultati anche i due proposti quest'anno, sessione 2011, e particolarmente il secondo, veramente ostico se non si fa riferimento alle sfoglie cilindriche. I due quesiti sono i seguenti:

ORDINAMENTO: *Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.*

Il volume è dato da:

$$V = \int_0^2 (2\pi x)x^3\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{32}{5}\right) = \frac{64}{5}\pi$$

PNI-Brocca: *Sia R la regione delimitata, per $x \in [0.\pi]$, dalla curva $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.*

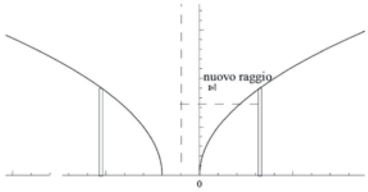
Il volume è dato da:

$$V = \int_0^\pi (2\pi x)\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 2\pi\,(-x\cos x + \operatorname{sen} x)|_0^\pi = 2\pi^2$$

Alla più solida comprensione del metodo si può contribuire con la seguente variazione all'esempio riportato:

Si calcoli il volume della regione dell'esempio 1 ruotata intorno alla retta x=-1.

Il disegno della figura è



Dividendo la regione verticalmente, l'altezza della sfoglia o guscio cilindrico non cambia a seguito della traslazione dell'asse di rotazione, tuttavia si deve aggiungere 1 ad ogni raggio. L'integrale diventa

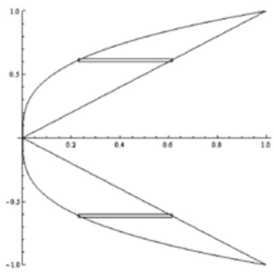
$$2\pi \int_0^4 (x+1)\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$$

Per concludere converrà riportare il caso che coinvolge la traslazione verticale e la rotazione intorno all'asse x.

La formula adottabile è la seguente: se si ha una regione la cui area è limitata a destra dalla curva $x = f(y)$ e a sinistra dalla curva $x = g(y)$, sull'intervallo $[c,d]$, allora ogni cilindro avrà altezza $f(y) - g(y)$, raggio y e superficie laterale $2\pi y[f(y) - g(y)]$. Per trovare il volume del solido basta calcolare

$$2\pi \int_c^d y[f(y) - g(y)] \,\mathrm{d}y$$

Un esempio al riguardo è il seguente:
Si calcoli il volume della regione delimitata dalla curva $x = y^3$ e dalla retta $x = y$, da $y = 0$ a $y = 1$ ruotata intorno all'asse x.
Il disegno è

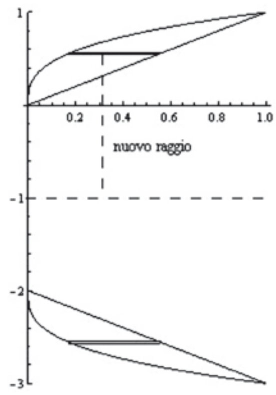


Ogni striscia orizzontale è limitata a destra dalla curva $x = y$ e a sinistra dalla curva $x = y^3$.

L'integrale è

$$2\pi \int_0^1 y(y - y^3) \,\mathrm{d}y$$

Se vogliamo ruotare la regione intorno alla retta $y = -1$ la regione diventa



Il raggio di ogni cilindro aumenta di 1 a seguito della traslazione dell'asse di rotazione; così l'integrale diventa

$$2\pi \int_0^1 (y+1)(y-y^3)\,\mathrm{d}y$$

Non è interessante? Si richiede, per calcolarne il volume, di immaginare il solido, di vederlo sezionato, a fogli, e, se di rotazione, di valutare il modo più semplice di dividere la regione che lo genera, verticalmente oppure orizzontalmente. Una volta rappresentati i contorni ed i limiti di integrazione, bisogna solo calcolare l'integrale.

Un modo di procedere che non faceva parte della tradizione scolastica italiana. Un inspiegabile vuoto e una forte limitazione alla comprensione piena di uno dei più formidabili strumenti dell'Analisi Matematica. Un modo di procedere ricco di significato sia dal punto di vista della visualizzazione spaziale sia dal punto di vista della formalizzazione analitica e che tra l'altro porta subito a rendersi conto del perché derivando, rispetto al raggio, la formula che dà il volume della sfera, $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ si ottenga, $V'(x) = 4\pi x^2$, cioè la superficie e, analogamente, perché la derivata dell'area del cerchio dia come risultato la lunghezza della circonferenza. E, ancora, darsi una spiegazione del perché ciò non accade per il volume di un cubo e l'area di un quadrato le cui funzioni derivate rispetto alla variabile, spigolo o lato, danno rispettivamente la metà della superficie totale e la metà del perimetro.

✉ANGELO AMBRISI
angelo.ambrisi@unina2.it