INTEGRAZIONE PER PARTI

Si tratta di un metodo per trovare una primitiva di un prodotto di due funzioni, nell'ipotesi che una di queste due funzioni sia la derivata di qualche altra funzione nota.

La formula di integrazione per parti si ottiene dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Dimostrazione

Consideriamo due funzioni derivabili, f e g. Sappiamo che la derivata del loro prodotto è data da

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$$

da cui si ricava

$$fg' = (fg)' - f'g\,.$$

Integrando primo e secondo membro dell'ultima equazione si deduce che

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

Il fattore *f(x)* viene chiamato fattore finito e *g'(x)* fattore differenziale.

La scelta del fattore finito e del fattore differenziale è determinante per la riuscita del calcolo. Non esiste una regola generale ma, in generale, è bene tener presente che

- derivando *f(x)* devo ottenere una funzione più "semplice".

  Esempio: in $\int xe^x dx$ conviene porre *f(x)=x*
- devo conoscere una primitiva di *g '(x)*

  Esempio: in $\int x\ln x\, dx$ si deve porre *g(x)=x*
- si può applicare più volte il metodo di integrazione per parti

  Esempio: in $\int x^2e^x dx$, posto *f(x)=x²* ottengo $\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int xe^x dx$

  e applico di nuovo il metodo per parti al nuovo integrale

ESERCIZI

Esempio svolto

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int xe^x dx$$

Scegliamo un fattore da integrare (detto fattore differenziale) e uno da derivare (detto fattore finito):

- fattore differenziale $f'(x) = e^x$, quindi $f(x) = e^x$
- fattore finito $g(x) = x$, quindi $g'(x)=1$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x\cdot 1dx = xe^x - e^x + c$$

Altri esercizi

a) $\int x^2 \log x\, dx$.	f) $\int \frac{\log x}{x^2} dx$. . . . .
b) $\int x^2 \cos x\, dx$.	g) $\int \arctan x\, dx$. . . . .
c) $\int x^2 e^{2x} dx$.	h) $\int \arcsin x\, dx$. . . . .
d) $\int x \cosh(3x)\, dx$.	i) $\int x \cos^2 x\, dx$. . . . .
e) $\int (x+5) \log x\, dx$.	

Oss.

seno iperbolico è la funzione $senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

coseno iperbolico è la funzione $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

. Calcolare i seguenti integrali usando la regola di integrazione per parti:

a) $\int x^2 \log x \, dx$ .... $\left[\frac{1}{3}x^3\left(\log x - \frac{1}{3}\right) + c\right]$

b) $\int x^2 \cos x \, dx$ .... $\left[\left(x^2 - 2\right)\sin x + 2x \cos x + c\right]$

c) $\int x^2 e^{2x} dx$ .... $\left[\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{2x}}{2} + c\right]$

d) $\int x \cosh(3x) \, dx$ .... $\left[\frac{1}{3}x \sinh 3x - \frac{1}{9}\cosh 3x + c\right]$

e) $\int (x+5) \log x \, dx$ .... $\left[\left(\frac{x^2}{2} + 5x\right)\log x - \frac{x^2}{4} - 5x + c\right]$

f) $\int \frac{\log x}{x^2} dx$ .... $\left[-\frac{1+\log x}{x} + c\right]$

g) $\int \arctan x \, dx$ .... $\left[x \arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1 + x^2\right) + c\right]$

h) $\int \arcsin x \, dx$ .... $\left[x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c\right]$

i) $\int x \cos^2 x \, dx$ .... $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{x^2}{2}\right) + c\right]$

l) $\int e^{2x} \cos x \, dx$ .... $\left[\frac{\sin x + 2\cos x}{5}e^{2x} + c\right]$