Integrali per sostituzione $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$

- si cerca una funzione g(t) da sostituire alla variabile x, cioè *x=g(t)* (la funzione *g(t)* deve essere derivabile e invertibile).
- si calcola *g'(t)*
- si trova la nuova funzione *f*
- si sostituisce nella formula $\int f(g(t))g'(t)dt$ (sperando che il nuovo integrale sia più semplice)
- risolto l'integrale con la variabile *t* si torna alla variabile x ponendo $t=g^{-1}(t)$

Esempio

$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx =$ si pone $\sqrt{x}=t$ $\rightarrow$ $x=t^2=g(t)$ $\rightarrow$ $g'(t)=2t$

la funzione $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ con la nuova variabile diventa $\frac{1}{1+t}$

Quindi il nuovo integrale da calcolare è $\int \frac{1}{1+t}2t\,dt =$, si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta:

$$\int \frac{1}{1+t}2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}t\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt = 2\int 1+\frac{-1}{1+t}dt = 2\left[t-\ln|1+t|\right]+c = 2t-2\ln|1+t|+c =$$
$$= 2t-\ln|1+t|^2+c = 2t-\ln(1+t)^2+c$$

Trovata la soluzione con la variabile t si effettua una nuova sostituzione $\sqrt{x}=t$ e si trova la soluzione $2t-\ln(1+t)^2+c = 2\sqrt{x}-\ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2+c$

Sostituzioni particolari

integrali con *senx* e/o *cosx* **si pone** $senx=\frac{2t}{1+t^2}$ o $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ con $t=tg\frac{x}{2}$ (formule parametriche)

integrali con $\sqrt{a^2-x^2}$ **si pone** $x=a\,sent$

integrali con $\sqrt{x^2\pm a^2}$ **si pone** $\sqrt{x^2\pm a^2}=t-x$ (si ricava *x*…..)

esercizi

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cosh x+1}\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x}+1)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

Funzioni, primitive e derivate

Osservazioni su f	Conseguenze per f'
Negli intervalli in cui f(x) è crescente	*f'(x) > 0*
Negli intervalli in cui f(x) è decrescente	*f'(x) < 0*
Nei punti in cui f(x) ha tangenti orizzontali	*f'(x) = 0 (f'(x) interseca l'asse delle x)*
Negli intervalli in cui f(x) ha la concavità verso l'alto	*f'(x) è crescente*
Negli intervalli in cui f(x) ha la concavità verso il basso	*f'(x) è decrescente*
Nei punti in cui f(x) ha flessi	*f'(x) ha tangenti orizzontali negli stessi punti*
Se f(x) ammette asintoto orizzontale	*f'(x) tende a zero per $x \to \infty$*
Se f(x) ammette asintoto verticale	*f'(x) tende all'infinito nello stesso punto*
Se f(x) ammette asintoto obliquo $y = mx + q$	*f'(x) tende a m per $x \to \infty$*
Se f(x) è pari	*f'(x) è dispari*
Se f(x) è dispari	*f'(x) è pari*

Osservazioni su f(x)	Conseguenze per F(x)
Negli intervalli in cui f(x) > 0	*F(x) è crescente*
Negli intervalli in cui f(x) < 0	*F(x) è decrescente*
Nei punti in cui f(x) = 0 e cambia di segno nell'intorno	*F(x) ha, negli stessi punti tangenti orizzontali, cioè massimi o minimi*
Nei punti in cui f(x) = 0 e non cambia di segno nell'intorno	*F(x) ha un flesso a tangente orizzontale*
Se f(x) è crescente	*F(x) ha la concavità verso l'alto*
Se f(x) è decrescente	*F(x) ha la concavità verso il basso*
Nei punti in cui f(x) ha tangenti orizzontali	*F(x) ha, negli stessi punti, dei flessi*

esercizi

1. Nel disegno a fianco individuare f, F, f' e giustificare la risposta.
2. Tracciare il grafico di f(x)= x^2-4x e ricavare il grafico approssimato di una sua primitiva.
3. Determina a e b in modo che $F(x) = a\,sen 2x + b\cos 3x$ sia una primitiva di $f(x) = 6\,sen 3x - 4\cos 2x$.
4. Fra tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{6}{3+2x}$ determina quella che passa per il punto P=(-1;3).
5. Fra tutte le primitive di $f(x) = xe^x$ individuare quella per cui l'ordinata del punto di minimo è -4.