- 3° passo: si confrontano le soluzioni trovate con le condizioni di esistenza e si scartano quelle che non le soddisfano.

ESEMPIO Equazione irrazionale con più di un radicale quadratico

Risolviamo l'equazione $\sqrt{x}-\sqrt{x+5}=-\sqrt{x-3}$.

1° passo **Determiniamo le condizioni di esistenza.**
Affinché i tre radicali che compaiono nell'equazione siano definiti, x deve soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

che è verificato per $x \geq 3$.

2° passo **Riconduciamo l'equazione alla forma $\sqrt{A(x)}=B(x)$, quindi risolviamola.**
Per evitare che, negli elevamenti al quadrato, si introducano delle soluzioni estranee, riscriviamo l'equazione portando $-\sqrt{x-3}$ al primo membro e $-\sqrt{x+5}$ al secondo:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x+5}$$
I due membri ora sono non negativi quindi, elevandoli al quadrato, otteniamo un'equazione equivalente

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-3}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2$$
Elevando i due membri al quadrato

$$x+x-3+2\sqrt{x^2-3x}=x+5$$
Svolgendo i quadrati, presta attenzione a non dimenticare il doppio prodotto al 1° membro! $2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-3}=2\sqrt{x^2-3x}$

$$2\sqrt{x^2-3x}=8-x$$
Isolando il radicale al 1° membro, ci siamo ricondotti alla forma voluta (a meno del fattore 2 al 1° membro, che non comporta cambiamenti nello schema risolutivo)

$$\begin{cases} 8-x \geq 0 \\ 4(x^2-3x)=(8-x)^2 \end{cases}$$
Sistema equivalente all'equazione

$$x=-\frac{16}{3} \vee x=4$$
Risolvendo il sistema

3° passo **Concludiamo accettando solo le soluzioni che soddisfano le condizioni di esistenza.**
La soluzione $x=-\dfrac{16}{3}$ non soddisfa la condizione di esistenza, $x \geq 3$, quindi è da scartare; la soluzione $x=4$ invece soddisfa tale condizione. In conclusione, l'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S=\{4\}$.

Disequazioni irrazionali

Come per le equazioni irrazionali, anche la tecnica risolutiva delle **disequazioni irrazionali** prevede di riportarsi a una disequazione razionale mediante elevamenti a potenza.
Abbiamo visto qual è il comportamento di un'equazione rispetto all'elevamento a potenza pari o dispari, ma qual è l'analogo comportamento di una disuguaglianza? Si potrebbe dimostrare che:

- elevando entrambi i membri di una disuguaglianza a potenza di esponente **dispari** si ottiene una disuguaglianza nello stesso verso:

$$a<b \Leftrightarrow a^n<b^n \quad \forall a,b \in \mathbf{R} \text{ e } \forall n \in \mathbf{N} \text{ con } n \text{ dispari}$$