

- elevando entrambi i membri di una disuguaglianza a potenza di esponente **pari** in generale non è detto che si ottenga una disuguaglianza nello stesso verso (per esempio: $-3 < -2$ ma $(-3)^2 > (-2)^2$); se però i due membri della disuguaglianza sono **non negativi**, allora si ottiene una disuguaglianza nello stesso verso:

$$a < b \Rightarrow a^n < b^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_0^+ \text{ e } \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ con } n \text{ pari}$$

Sulla base di questi principi, possiamo ora passare in rassegna le tecniche per risolvere le disequazioni irrazionali che si incontrano più di frequente.

1. La disequazione si può ricondurre alla forma $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Facciamo alcune considerazioni, che ci porteranno a scrivere un sistema equivalente alla disequazione data.

- Osserviamo anzitutto che il radicale al primo membro è definito nell'insieme dei numeri reali a condizione che sia $A(x) \geq 0$ (**condizione di esistenza**).
- Il primo membro, quando è reale, è certamente non negativo, quindi, affinché la disequazione sia verificata, il secondo membro deve essere positivo. Deve quindi risultare $B(x) > 0$.
- Se $A(x) \geq 0$ e $B(x) > 0$, i due membri della disequazione sono non negativi, quindi, elevandoli al quadrato, otteniamo una disequazione equivalente: $A(x) < B^2(x)$.

In conclusione:

I valori di x che soddisfano la disequazione $\sqrt{A(x)} < B(x)$ sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ A(x) < B^2(x) \end{cases} \quad [1.5]$$

Attenzione!

1. La disequazione $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ ha uno schema risolutivo analogo a quello qui a fianco: con ragionamenti del tutto simili a quelli effettuati poc'anzi si conclude che essa equivale al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x) \end{cases}$$

2. Le disequazioni irrazionali del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$ in cui $B(x)$ è un **numero negativo** sono **impossibili** perché la condizione $B(x) > 0$ non è verificata. Per esempio, è impossibile la disequazione $\sqrt{x+1} < -3$.

ESEMPIO Disequazione della forma $\sqrt{A(x)} < B(x)$

Risolviamo la disequazione $\sqrt{x} < x - 2$.

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x < (x - 2)^2 \end{cases}$$

cioè, risolvendo le singole disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 2 \\ x < 1 \vee x > 4 \end{cases}$$

Dallo schema seguente, dove le soluzioni delle singole disequazioni sono inserite dall'alto in basso nello stesso ordine in cui compaiono nel sistema, puoi dedurre che il sistema (e perciò la disequazione assegnata) è soddisfatto per $x > 4$.

