

2. La disequazione si può ricondurre alla forma $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Facciamo anche in questo caso alcune considerazioni, che ci porteranno a scrivere un sistema equivalente alla disequazione data.

- Se $B(x) < 0$ e il primo membro è reale (cioè se $A(x) \geq 0$), la disequazione è certamente soddisfatta; dunque sono soluzioni della disequazione le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

- Se $B(x) \geq 0$, una eventuale soluzione della disequazione dovrà anzitutto essere tale che il primo membro esista, cioè tale che $A(x) \geq 0$; se queste due condizioni ($A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$) sono verificate, i due membri della disequazione sono non negativi, quindi, elevandoli al quadrato, otteniamo una disequazione equivalente. Sono dunque soluzioni della disequazione assegnata anche le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases}$$

Osservando le tre disequazioni del sistema, si può però notare che la prima è **superflua**, poiché $A(x)$ risulterà certamente non negativo se deve essere maggiore di un quadrato, come è richiesto dalla terza disequazione.

In conclusione:

I valori di x che soddisfano la disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ sono quelli per cui:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > B^2(x) \end{cases} \quad [1.6]$$

Presta attenzione al fatto che, come indica la presenza del connettivo \vee , l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{A(x)} > B(x)$ è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei due sistemi scritti.

ESEMPIO Disequazione della forma $\sqrt{A(x)} > B(x)$

Risolviamo la disequazione $\sqrt{9-x^2} > x+3$.

I valori di x che sono soluzioni della disequazione assegnata sono quelli per cui:

$$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 9-x^2 > (x+3)^2 \end{cases}$$

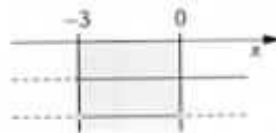
ovvero, risolvendo ciascuna delle disequazioni del sistema:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x < -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -3 \\ -3 < x < 0 \end{cases}$$

Dagli schemi seguenti puoi osservare che il primo sistema è impossibile; il secondo è soddisfatto per $-3 < x < 0$, che pertanto è anche soluzione della disequazione assegnata.



Primo sistema



Secondo sistema

Attenzione!

1. La disequazione $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$ ha uno schema risolutivo analogo a quello qui a fianco: con ragionamenti del tutto simili a quelli effettuati poc'anzi si conclude che essa equivale al sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B^2(x) \end{cases}$$

2. Le disequazioni irrazionali del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ in cui $B(x)$ è un numero negativo equivalgono alla condizione $A(x) \geq 0$. Per esempio, la disequazione $\sqrt{x+1} > -5$ è verificata per ogni $x \geq -1$.