ESEMPI ***Disequazioni della forma $|A(x)| \geq k$ e $|A(x)| \leq k$, con $k \leq 0$***

Risolviamo le disequazioni:

a. $|x+2| \geq -2$ b. $|x^2-2| \leq 0$ c. $|x^3-1| \leq 1-\sqrt{2}$

a. Poiché il valore assoluto di un numero è sempre positivo o nullo, la disequazione è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b. Poiché il valore assoluto di un numero non è mai negativo, la disequazione è verificata se e solo se $|x^2-2| = 0$, cioè per $x = \pm\sqrt{2}$.

c. Osserviamo che $1-\sqrt{2} < 0$. Poiché il valore assoluto di un numero non è *mai minore di zero, a maggior ragione non potrà essere né uguale né minore di* $1-\sqrt{2}$. La disequazione non è verificata da alcun valore reale di x.

Se $k > 0$, trattiamo separatamente il caso della disequazione del tipo $|A(x)| < k$ e quello della disequazione del tipo $|A(x)| > k$.

Attenzione!

Le disequazioni del tipo $|A(x)| \leq k$ e $|A(x)| \geq k$ si risolvono in modo del tutto analogo, ma i simboli $<$ e $>$ andranno sostituiti, rispettivamente, con $\leq$ e $\geq$.

$\|A(x)\| < k$	$\|A(x)\| > k$
Poiché il valore assoluto di un numero è *minore* di k se e solo se il numero appartiene all'intervallo $(-k, k)$, la disequazione equivale a: $-k < A(x) < k$	Poiché il valore assoluto di un numero è *maggiore* di k se e solo se il numero appartiene all'intervallo $(-\infty, -k)$ o all'intervallo $(k, +\infty)$, la disequazione equivale a: $A(x) < -k \vee A(x) > k$

ESEMPI **Disequazioni della forma $|A(x)| \leq k$ e $|A(x)| > k$, con $k > 0$**

Risolviamo le disequazioni:

a. $|x+3| \leq 4$ b. $|x^2-1| > 2$

a. La disequazione equivale a:

$$-4 \leq x+3 \leq 4 \quad \text{da cui segue:} \quad -7 \leq x \leq 1$$

b. La disequazione equivale a:

$$x^2-1 < -2 \vee x^2-1 > 2$$

da cui segue:

$$\underbrace{x^2+1<0}_{\substack{\text{disequazione}\\ \text{impossibile}}} \quad \vee \quad \underbrace{x^2-3>0}_{\substack{\text{disequazione soddisfatta}\\ \text{per } x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}}}$$

Concludiamo che la disequazione originaria è soddisfatta per:

$$x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}$$

2. La disequazione si può ricondurre a una delle seguenti forme:
$|A(x)| < B(x)$ o $|A(x)| > B(x)$ o $|A(x)| \leq B(x)$ o $|A(x)| \geq B(x)$

In questi casi, si può risolvere la disequazione ricordando la definizione di valore assoluto. Per esempio, la disequazione $|A(x)| < B(x)$ equivale a:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ A(x) < B(x) \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) < 0 \\ -A(x) < B(x) \end{cases}$$

Analogamente per gli altri casi.