ESEMPIO **Disequazione della forma $|A(x)| < B(x)$**

Risolviamo la disequazione $|x-1| < 2x$.

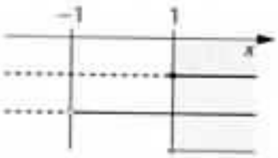
La disequazione equivale a:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < 2x \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) < 2x \end{cases}$$

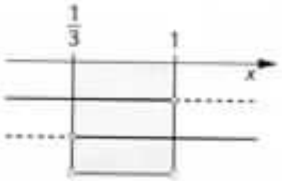
Risolvendo le disequazioni di ciascuno dei due sistemi, otteniamo:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Osserva ora le rappresentazioni grafiche dei due sistemi:



Primo sistema



Secondo sistema

Da esse puoi vedere che il primo sistema è soddisfatto per $x \geq 1$, il secondo sistema è soddisfatto per $\frac{1}{3} < x < 1$. Pertanto, la disequazione assegnata è soddisfatta per:

$x \geq 1 \vee \frac{1}{3} < x < 1$ ossia per $x > \frac{1}{3}$

PER SAPERNE DI PIÙ **Le disequazioni $|A(x)| < B(x)$ e $|A(x)| > B(x)$ possono essere risolte senza «sciogliere» il valore assoluto?**

Il metodo che abbiamo utilizzato nell'esempio precedente per risolvere una disequazione della forma $|A(x)| < B(x)$ è basato sullo «scioglimento» del valore assoluto, in base alla definizione. Questo metodo è analogo a quello che abbiamo utilizzato per risolvere le equazioni dello stesso tipo e ha il pregio di poter essere utilizzato anche per disequazioni con più di un valore assoluto; tuttavia è possibile dimostrare che le disequazioni $|A(x)| < B(x)$ (e le analoghe dove $<$ è sostituito con $>$, $\leq$, $\geq$) possono essere risolte più rapidamente senza «sciogliere» il valore assoluto, secondo uno schema risolutivo analogo a quello utilizzato per le disequazioni in cui $B(x)$ è un numero, vale a dire:

$|A(x)| < B(x)$ equivale a $-B(x) < A(x) < B(x)$

$|A(x)| > B(x)$ equivale a $A(x) < -B(x) \vee A(x) > B(x)$

Analoghe equivalenze valgono se $<$, $>$ vengono sostituiti rispettivamente con $\leq$, $\geq$.
Per esempio, la disequazione poc'anzi risolta, $|x-1| < 2x$, in base alla prima equivalenza avrebbe potuto essere risolta più rapidamente risolvendo semplicemente il sistema:

$$\begin{cases} x-1 < 2x \\ x-1 > -2x \end{cases}$$

Figure dinamiche

Un approfondimento sulle disequazioni con più valori assoluti è disponibile on-line.

3. La disequazione si può ricondurre a una delle seguenti forme:
$|A(x)| < |B(x)|$ o $|A(x)| > |B(x)|$ o $|A(x)| \leq |B(x)|$ o $|A(x)| \geq |B(x)|$

Poiché i due membri della disequazione sono non negativi, elevandoli al quadrato si ottiene una disequazione equivalente, in cui non compaiono valori assoluti.