1.1 Equazioni e disequazioni con valori assoluti

Per risolvere l'**equazione** $|f(x)| = g(x)$:

- determiniamo gli intervalli reali in cui $f(x)$ è positiva e quelli in cui è negativa;
- risolviamo $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$;
- la soluzione dell'equazione è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi.

Per risolvere $|f(x)| = k$:

- se $k < 0$, l'equazione $|f(x)| = k$ è impossibile;
- se $k \geq 0$, l'equazione $|f(x)| = k$ si trasforma in $f(x) = \pm k$.

Per risolvere la **disequazione** $|f(x)| \geq g(x)$:

- determiniamo gli intervalli di positività di $f(x)$;
- risolviamo $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} -f(x) \geq g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$;
- la soluzione della disequazione è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi.

Se $k < 0$:

- $|f(x)| \geq k$ è vera per ogni x del dominio di $f(x)$;
- $|f(x)| \leq k$ è impossibile.

Se $k > 0$:

- $|f(x)| \leq k$ si trasforma in $-k \leq f(x) \leq k$;
- $|f(x)| \geq k$ si trasforma in $f(x) \leq -k \vee f(x) \geq k$.

Se sono presenti più valori assoluti, studiamo il segno delle espressioni contenute in ciascuno di essi, risolviamo le equazioni o disequazioni che derivano dai diversi casi e uniamo le soluzioni ottenute.

ESERCIZI

1 **PER ESEMPIO**

Risolviamo le seguenti equazioni e disequazioni:

a) $|3x + 9| = |1 - x| + 4$; b) $|3x + 1| > 8$; c) $|4x - 5| \leq 7$; d) $|-2x + 4| < x + 3$.

a) Determiniamo gli intervalli di positività delle quantità contenute nei valori assoluti:

$3x + 9 > 0 \rightarrow x > -3$,
$1 - x > 0 \rightarrow x < 1$.

x		-3		1	
$3x + 9$	$-$		$+$		$+$
$1 - x$	$+$		$+$		$-$

Se $x < -3$, l'equazione è: $-3x - 9 = 1 - x + 4$ e la soluzione è: $x = -7$, accettabile.
Se $-3 \leq x \leq 1$, l'equazione è: $3x + 9 = 1 - x + 4$ e la soluzione è: $x = -1$, accettabile.
Se $x > 1$, l'equazione è: $3x + 9 = -1 + x + 4$ e la soluzione è: $x = -3$, non accettabile.
Le soluzioni dell'equazione iniziale sono: $x = -7 \vee x = -1$.

b) Poiché $|f(x)| \geq k$, con $k > 0$, è equivalente a $f(x) \leq -k \vee f(x) \geq k$:

$$|3x + 1| > 8 \rightarrow 3x + 1 < -8 \vee 3x + 1 > 8 \rightarrow x < -3 \vee x > \frac{7}{3}.$$

c) La disequazione $|f(x)| \leq k$, con $k > 0$, è equivalente a $-k \leq f(x) \leq k$:

$$|4x - 5| \leq 7 \rightarrow -7 \leq 4x - 5 \leq 7 \rightarrow -2 \leq 4x \leq 12 \rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3.$$

d) Distinguiamo due casi.

Se $-2x + 4 \geq 0$ e cioè $x \leq 2$, allora: $|-2x + 4| = -2x + 4 \rightarrow -2x + 4 < x + 3 \rightarrow x > \frac{1}{3}$.

La soluzione è quindi: $\frac{1}{3} < x \leq 2$.

Se $-2x + 4 < 0$ e cioè $x > 2$, allora: $|-2x + 4| = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 < x + 3 \rightarrow x < 7$.

La soluzione è quindi: $2 < x < 7$.

La soluzione della disequazione iniziale è l'unione delle soluzioni trovate: $\frac{1}{3} < x < 7$.