- Un'equazione o una disequazione si dice **irrazionale** quando l'incognita compare sotto il segno di radice.
- L'espressione $\sqrt[n]{f(x)}$:
  - se n è pari, esiste soltanto per $f(x) \geq 0$;
  - se n è pari, ha segno positivo; se n è dispari, ha lo stesso segno di $f(x)$.

Risolvere...	**... è equivalente a risolvere...**	
	... se n è dispari...	**... se n è pari...**
$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$	$f(x) = [g(x)]^n$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$
$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$	$f(x) < [g(x)]^n$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n \end{cases}$
$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$	$f(x) > [g(x)]^n$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{cases}$

ESERCIZI

PER ESEMPIO

Risolviamo le seguenti equazioni e disequazioni:

a) $\sqrt{2x^2 - x - 1} = 1 - x$; b) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} \leq x - 4$; c) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 6$.

a) L'indice di radice è pari, quindi l'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 = (1-x)^2 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \leq 1 \\ 2x^2 - x - 1 = 1 + x^2 - 2x \end{cases} \to \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \leq 1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1 \\ x \leq 1 \\ x = -2 \vee x = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema e quindi dell'equazione iniziale sono $x = -2$, $x = 1$.

b) La disequazione è equivalente a:

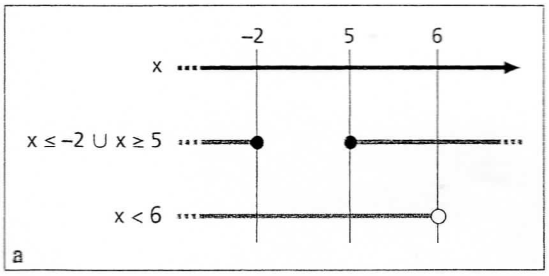
$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 \leq (x-4)^2 \end{cases} \to \begin{cases} x \leq 2 \vee x \geq 5 \\ x \geq 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq x^2 + 16 - 8x \end{cases} \to \begin{cases} x \leq 2 \vee x \geq 5 \\ x \geq 4 \\ x \leq 6 \end{cases} \to 5 \leq x \leq 6.$$

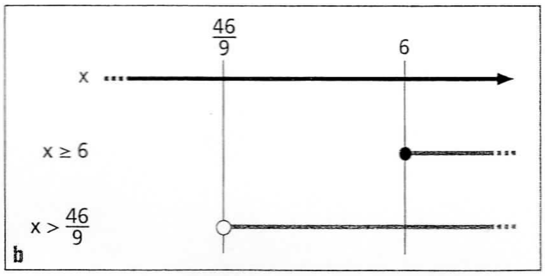
c) L'indice di radice è pari, quindi la disequazione è equivalente a:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 3x - 10 > (x-6)^2 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Otteniamo (figure **a** e **b**):

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 5 \\ x < 6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 6 \\ x > \frac{46}{9} \end{cases} \to (x \leq -2 \vee 5 \leq x < 6) \vee (x \geq 6).$$





La soluzione della disequazione è l'unione delle soluzioni dei sistemi. Abbiamo quindi $x \leq -2 \vee x \geq 5$.

$\sqrt[3]{-x^3 + 36x^2 - 27x} = 3 - x$ $[x = -1, x = 1]$
$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$ $\left[-2 < x < \frac{4}{3}\right]$
$\sqrt[3]{7x^3 - x + 2} \leq 2x$ $[x \geq 1]$

$\sqrt{5x^3 + 3x} = |x^2 + x|$ $[x = 0, x = 3]$
$\sqrt{2x + 10} < 3x - 5$ $[x > 3]$

$\sqrt[3]{\frac{x^2}{x-2}} = x$ $[x = 0, x = 1 \pm \sqrt{2}]$
$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} - x \leq -2$ $[x = 2]$