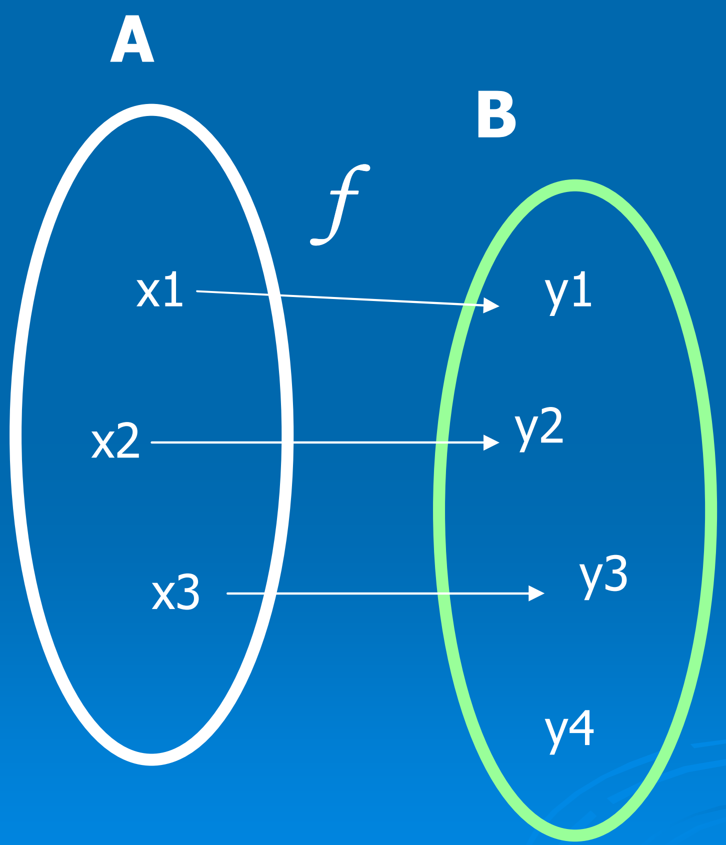
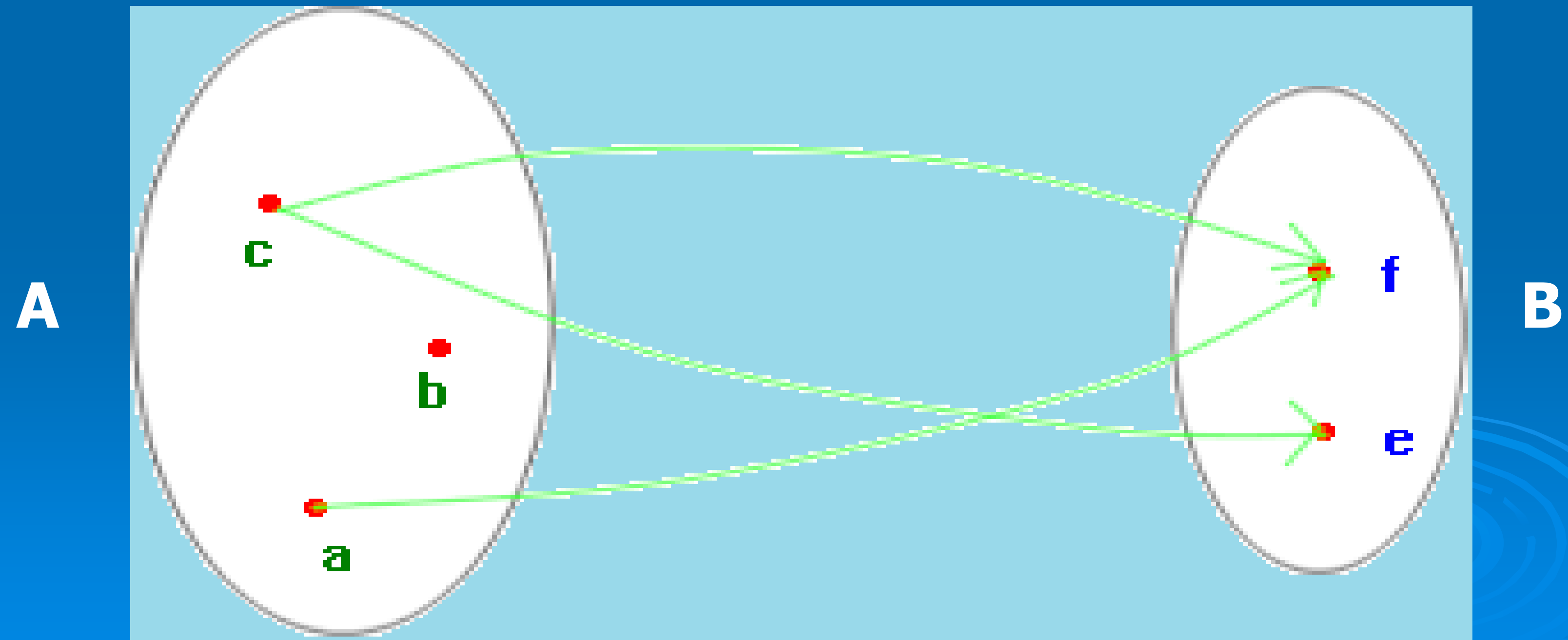
FUNZIONE. Cos'è?



Una FUNZIONE
è una RELAZIONE
che ad ogni elemento di un dato insieme A associa
<u>uno ed un solo elemento</u>
di un altro insieme B.

Relazione

Dati due insiemi non vuoti A e B (che possono eventualmente coincidere), si dice relazione tra A e B una qualsiasi legge che associa elementi di A ad elementi di B.



La funzione è una relazione univoca

Esempi

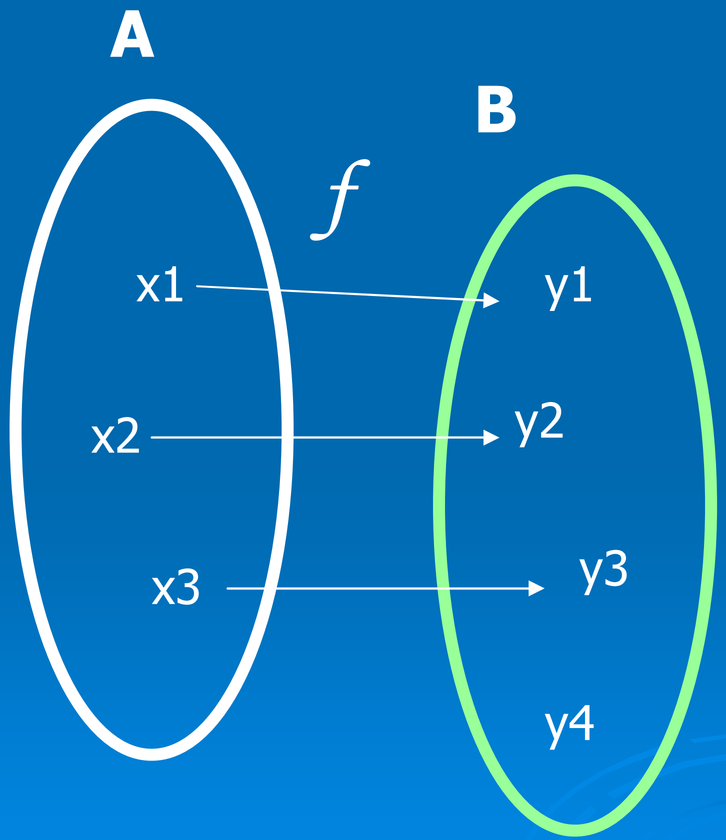
È una funzione   la relazione che

- ad una persona associa la propria madre;
- ad un' area associa il lato del quadrato che ha quell'area
- ad un numero associa il suo doppio

Non è una funzione la relazione che

- Ad una madre associa i propri figli
- ad un' area associa la base del triangolo che ha quell'area

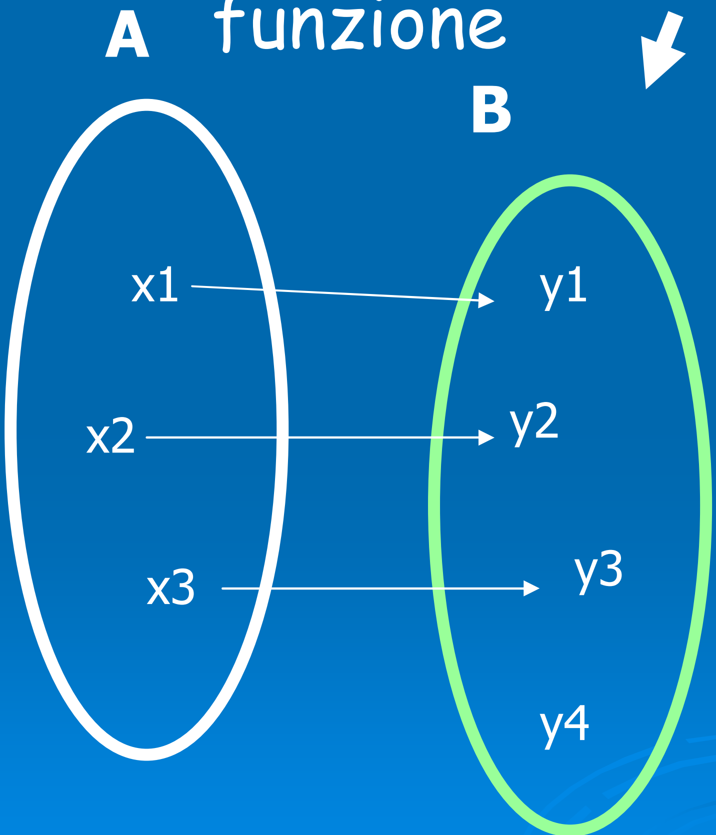
Rappresentazione



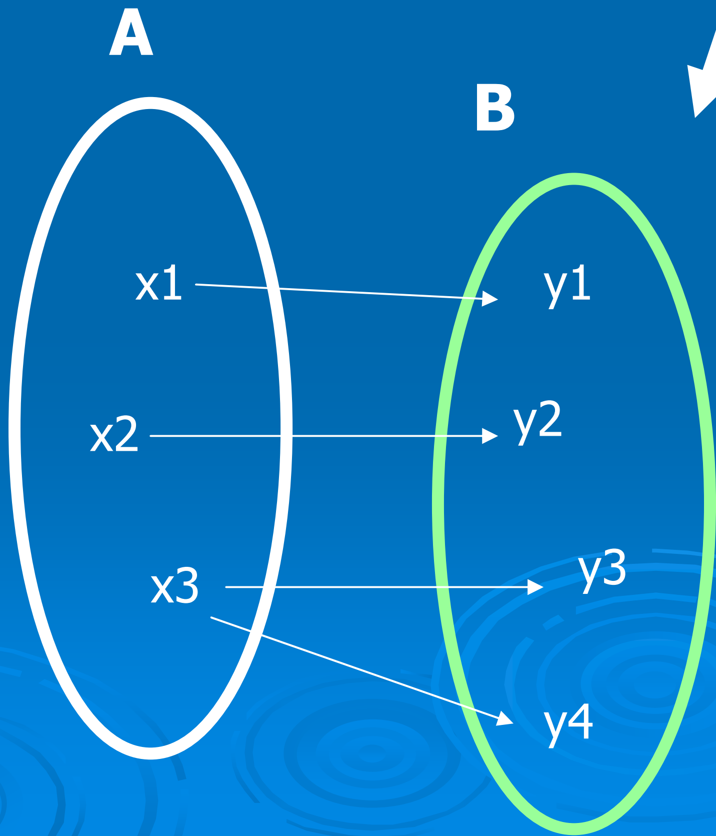
Le relazioni
e le funzioni
possono essere
rappresentate con i
diagrammi di Wenn.

FUNZIONE

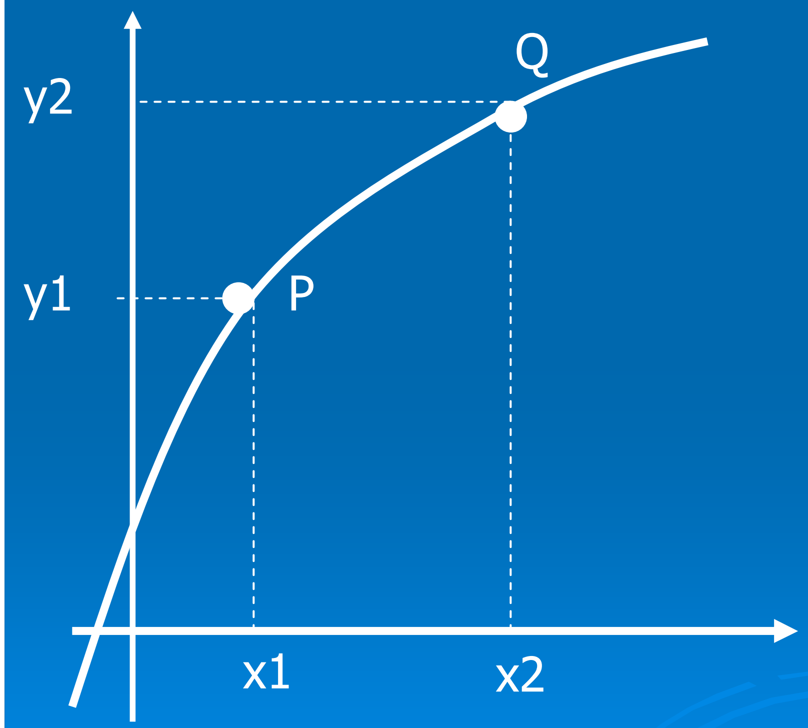
Questo grafico rappresenta una funzione



Questo grafico non rappresenta una funzione



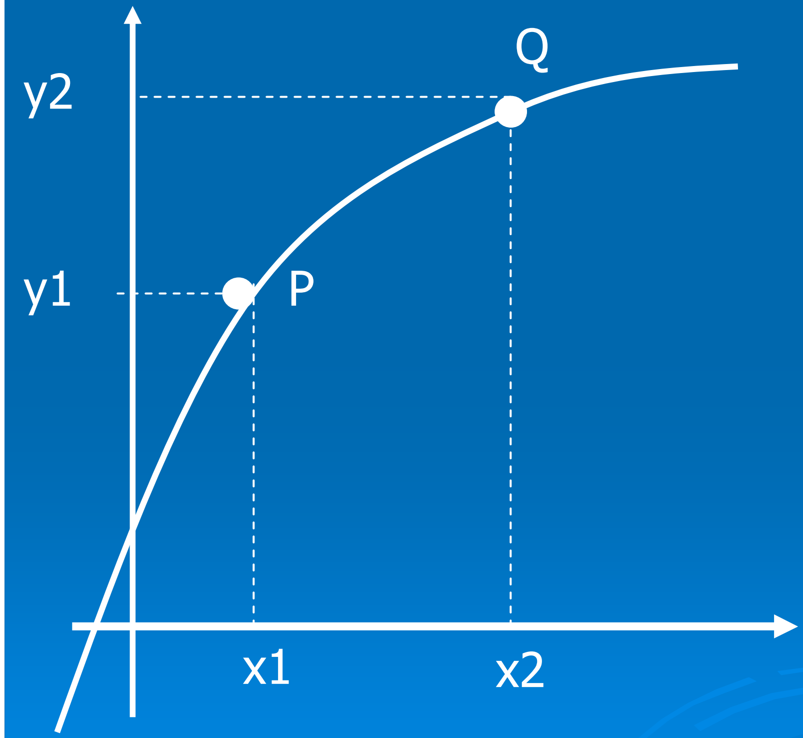
Rappresentazione



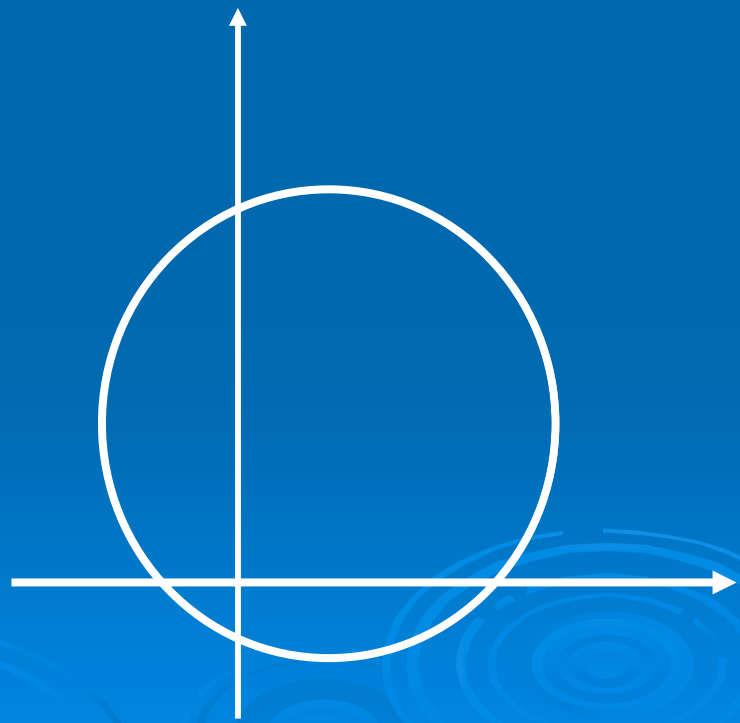
Se A e B sono insiemi di numeri reali, una funzione può essere rappresentata tramite il suo grafico. L'ascissa x di un punto del grafico è un elemento di A, l'ordinata y è il corrispondente elemento di B

Rappresentazione

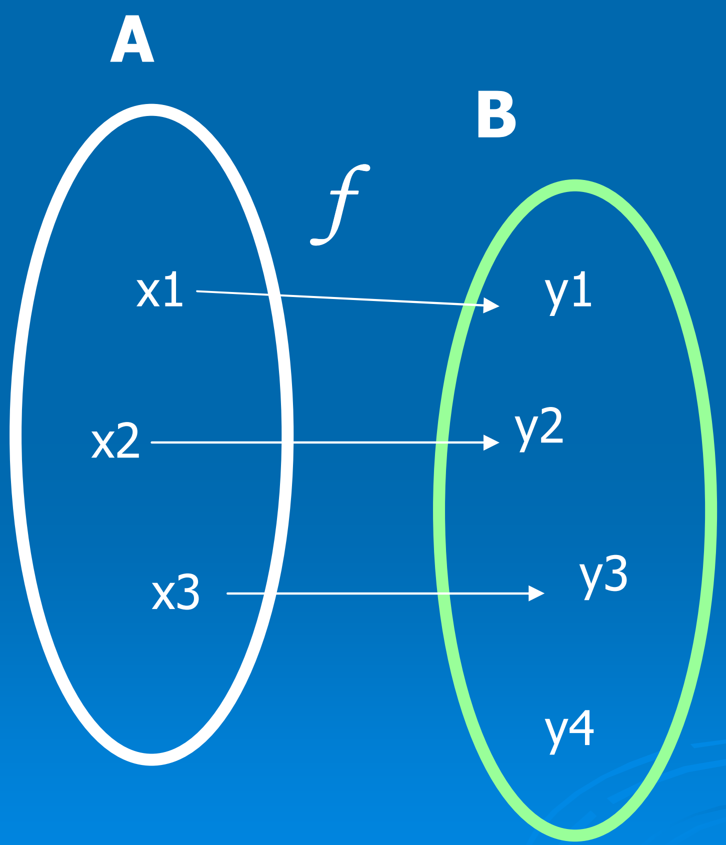
Questo è il grafico di una funzione



Questo non è il grafico di una funzione



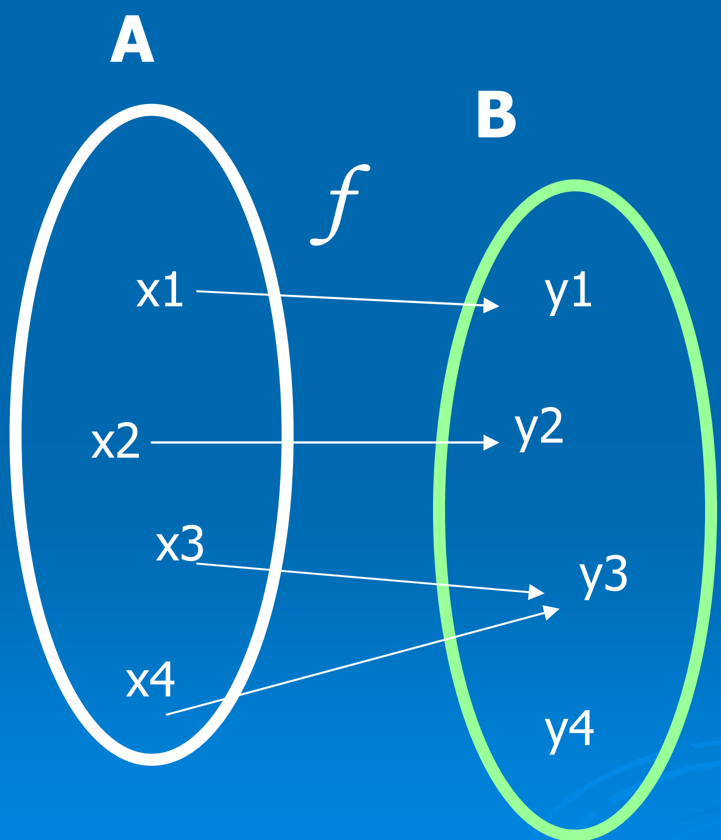
FUNZIONE



L'insieme di "partenza" A è detto <u>DOMINIO</u>.

L'insieme di "arrivo" B è detto <u>CODOMINIO</u>.

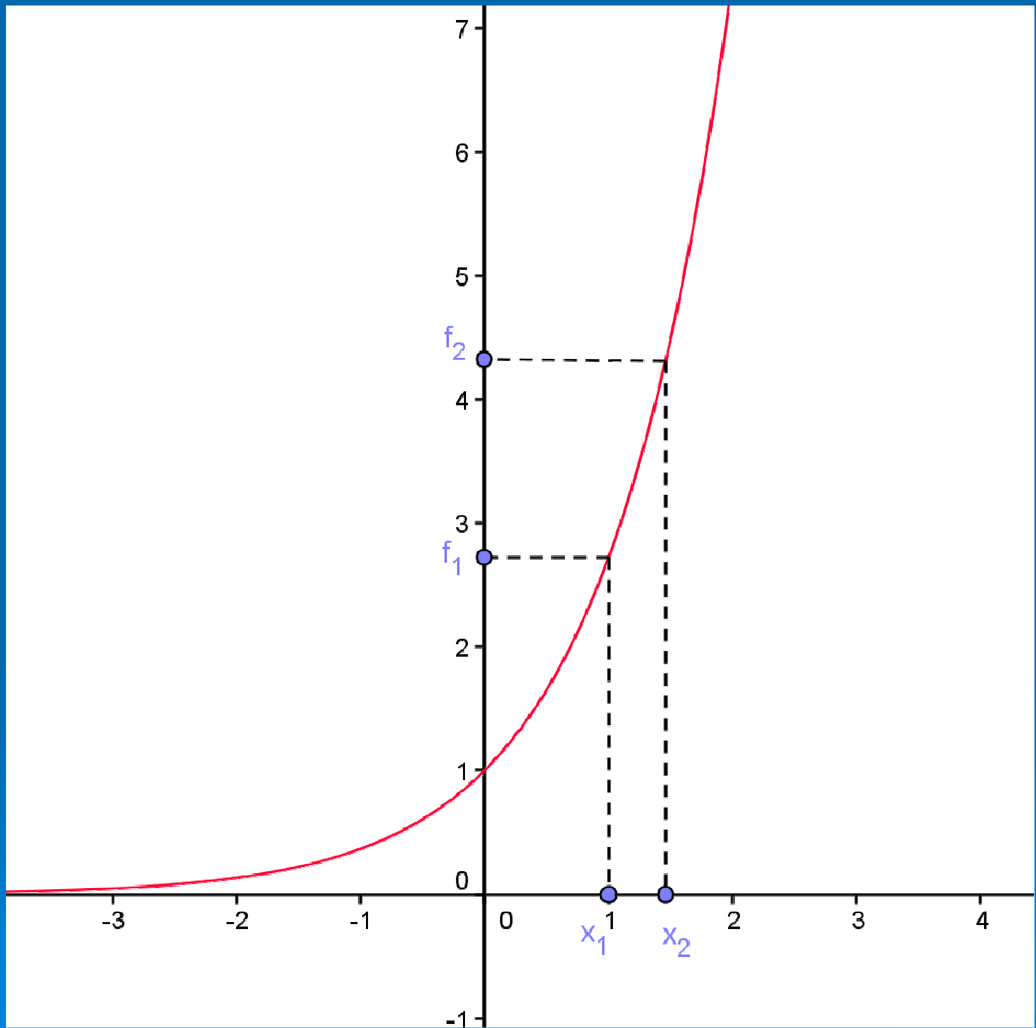
FUNZIONE $f\colon A \longrightarrow B$



y_1 è l' IMMAGINE di x_1 tramite la funzione f e si indica con $f(x_1)$

$\{x_1\}$ è la CONTROIMMAGINE di y1 tramite f.
La controimmagine di y_3 è $\{x_3; x_4\}$.

Immagine

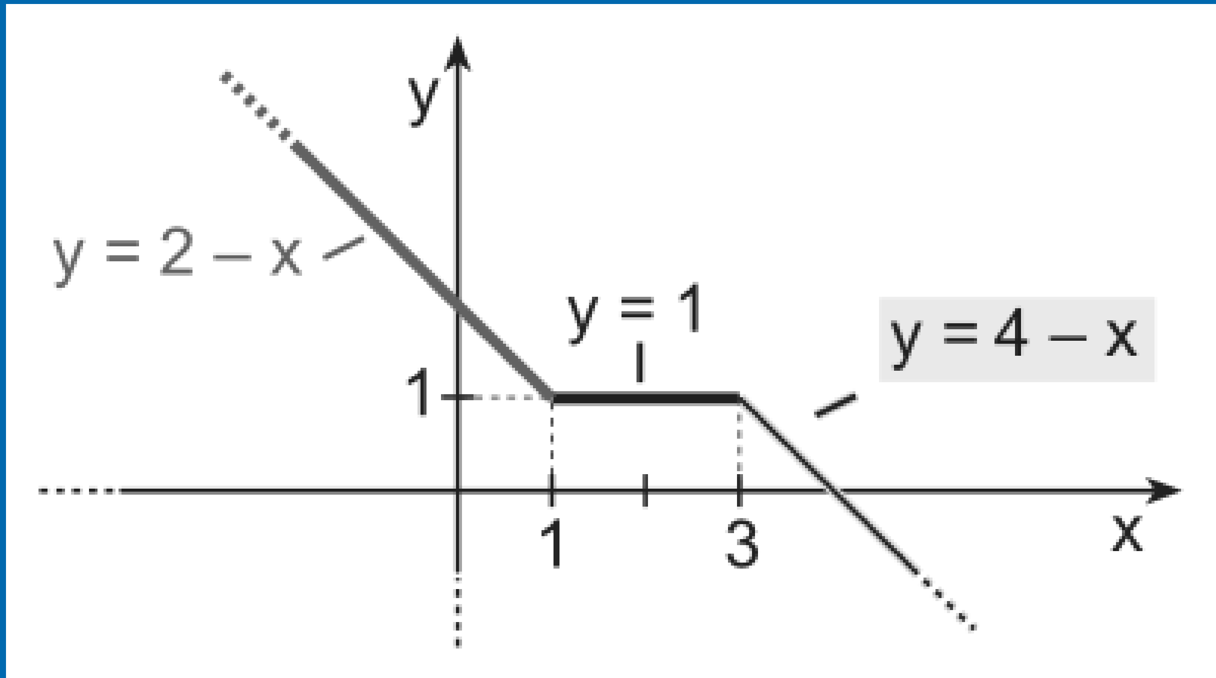


Esempi

L'immagine di x=1 è
y=2,7
L'immagine di x=1,4 è
y=4,3

L'immagine di A={x<0}
è
B ={0<y<1}
L'immagine di A={1<x<1,4}
è B ={2,7<y<4,3}

Immagine

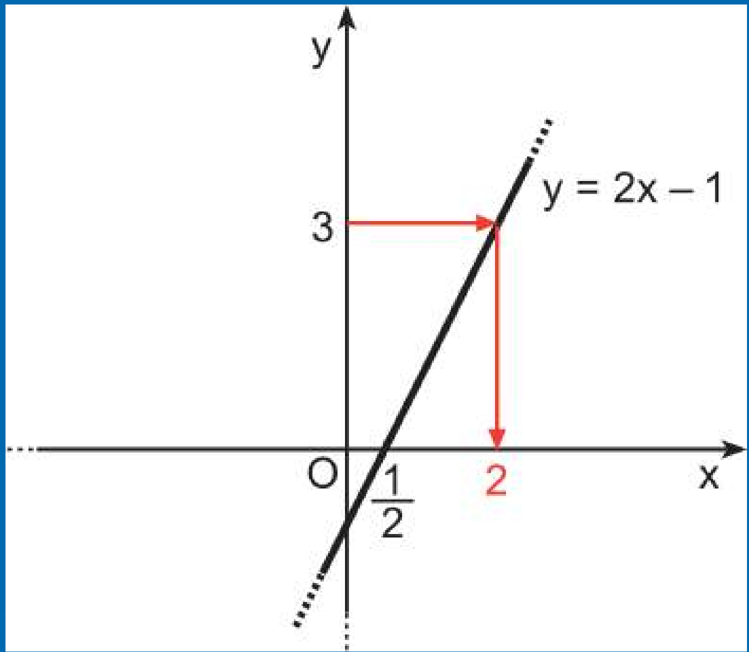


ESEMPIO Per trovare l'immagine di x= 0

1° metodo: leggo sul grafico l'ordinata del punto di ascissa 0

2° metodo: sostituisco 0 alla x nell'espressione della funzione, cioè trovo f(0)=2-0=2

Controimmagine

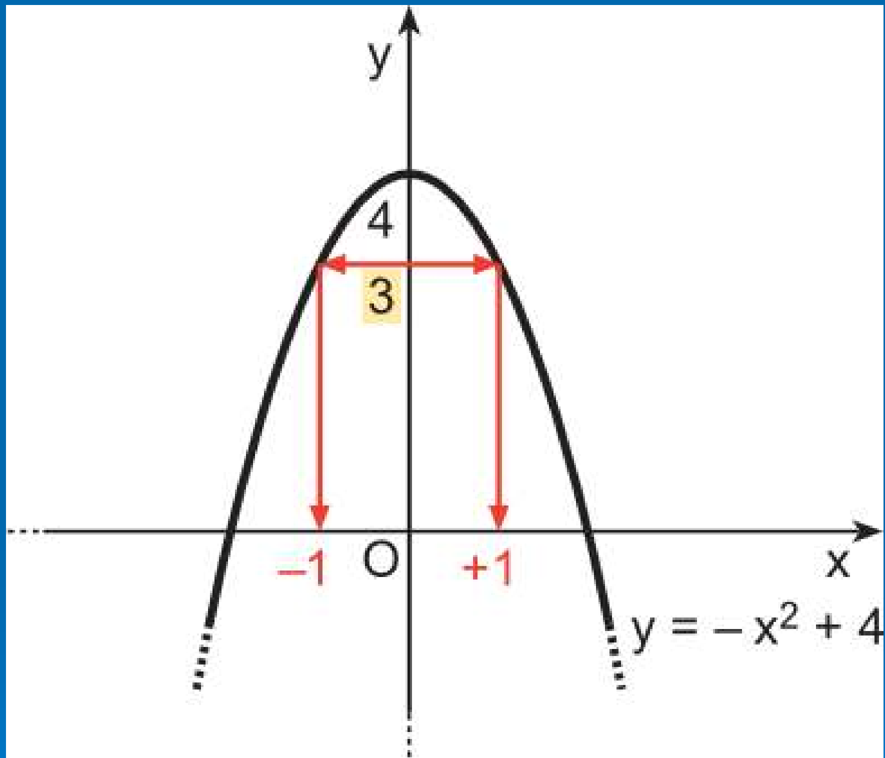


ESEMPIO

La controimmagine di
y=3
è
x= 2

Controimmagine

ESEMPIO



La controimmagine di
$y=3$ è $\{x=\pm 1\}$

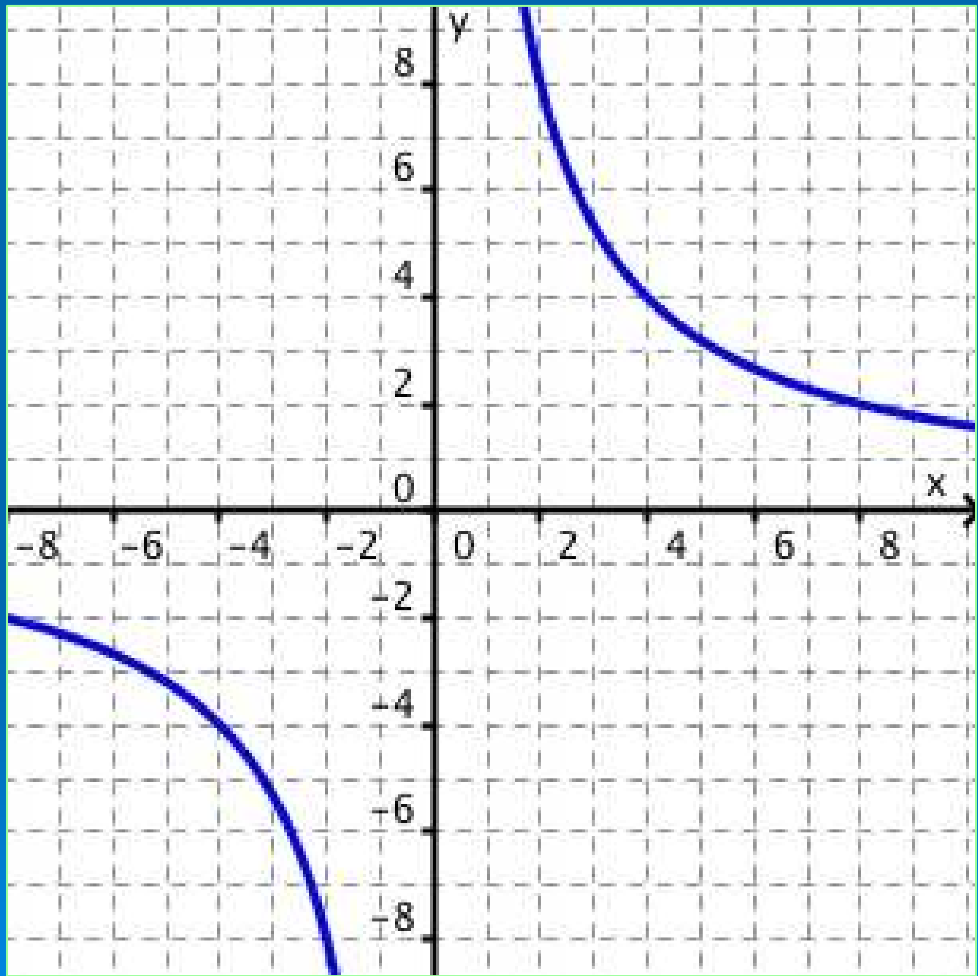
Per trovare la controimmagine di $y=3$

1° metodo: leggo sul grafico le ascisse dei punti che hanno 3 come ordinata

2° metodo: sostituisco 3 alla y nell'espressione della funzione e risolvo l'equazione, cioè

$$3= -x^2+4$$

Controimmagine



ESEMPIO

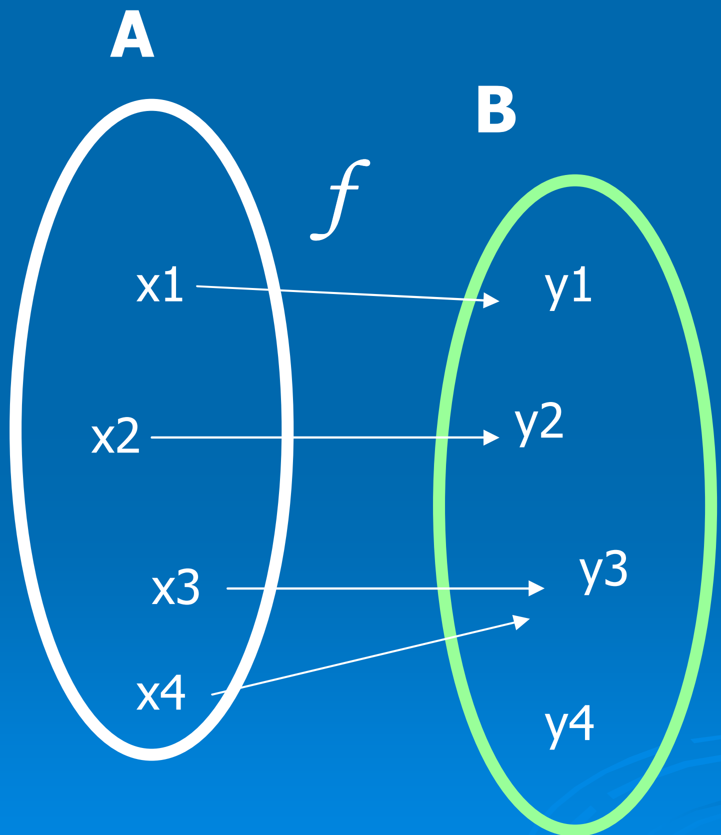
La controimmagine di

$\{4<y<8\}$

è

$\{2<x<4\}$

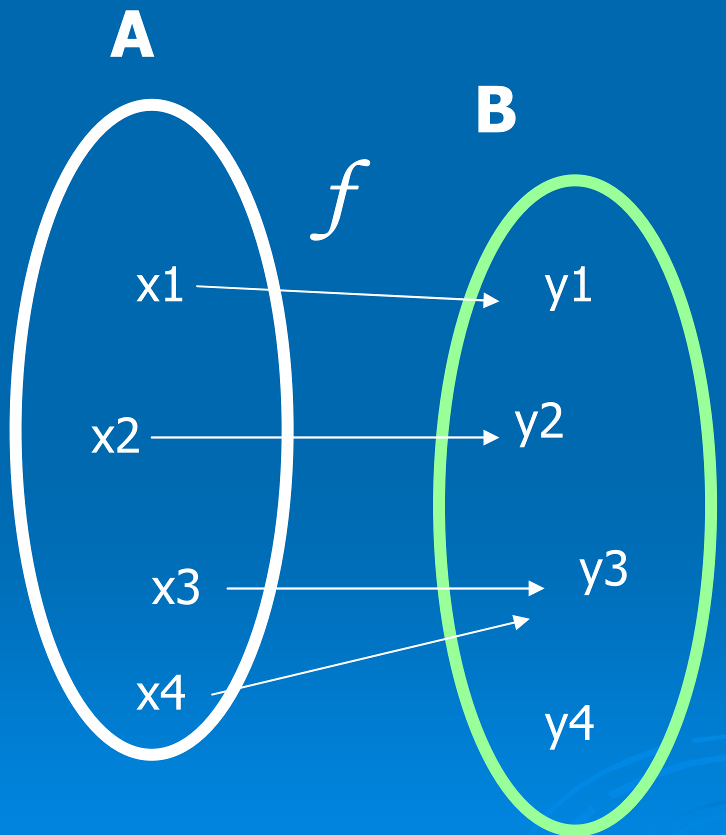
FUNZIONE: iniettiva



Una funzione si dice INIETTIVA se ogni elemento di B ha al più una controimmagine in A

f non è iniettiva perché y3 ha due controimmagini, x3 e x4

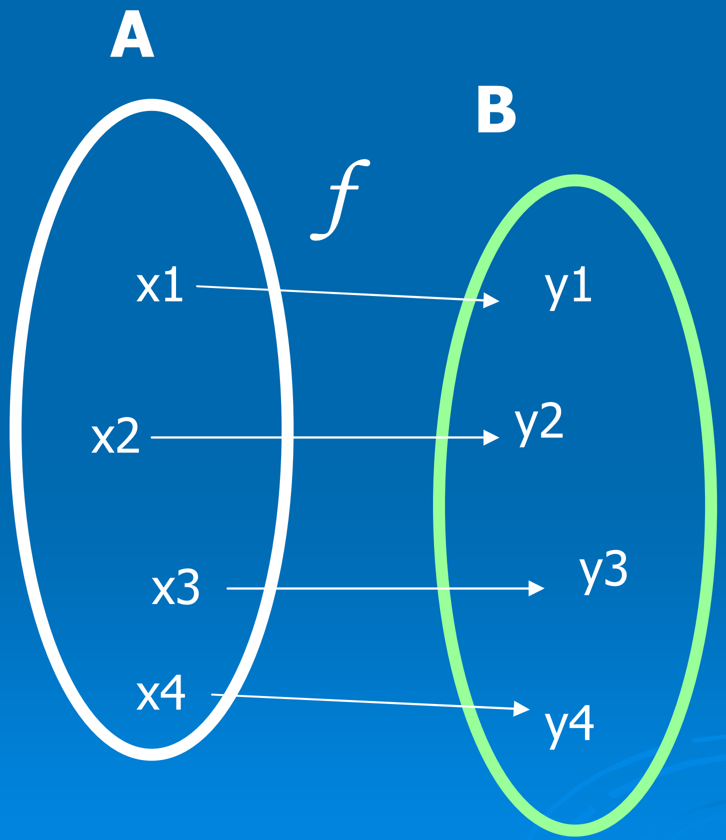
FUNZIONE: suriettiva



Una funzione si dice SURIETTIVA se ogni elemento di B ha almeno una controimmagine in A

f non è suriettiva perché y4 non ha controimmagine

FUNZIONE: biunivoca



Una funzione si dice BIUNIVOCA se è iniettiva e suriettiva

Classificazioni delle funzioni matematiche

Le funzioni possono essere classificate in **ALGEBRICHE e TRASCENDENTI**

Se l'espressione analitica che descrive una funzione contiene solo addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, elevamento a potenza, estrazione di radice la funzione si dice ALGEBRICA. Tra le funzioni algebriche troviamo:

- razionali intere $y = 5x - 7$ $y = x^2 + 3x - 7$
- razionali fratte $y = \dfrac{3x-7}{2x+4}$
- irrazionali $y = \sqrt[3]{x-1}$

FUNZIONE: classificazione

Le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche sono chiamate funzioni **TRASCENDENTI**

Sono FUNZIONI TRASCENDENTI: funzione esponenziale e logaritmica, le funzioni goniometriche e tutte le loro combinazioni

Dominio di una funzione

Data una funzione di equazione $y=f(x)$

si definisce il **DOMINIO**

(campo di esistenza o **insieme di definizione)**

della funzione l'insieme dei valori reali di x per i quali

l'espressione f(x) ha significato.

Si indica con *D o C.E.*

Dominio di una funzione

Come si trova il dominio di una funzione?
Dipende dalla funzione:

- in una funzione FRATTA bisogna porre il denominatore diverso da zero

- in una funzione IRRAZIONALE con una radice indice pari bisogna porre il radicando maggiore o uguale a zero

- … … … … …

FUNZIONE		DOMINIO
Razionale intera	$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots c$	$D = (-\infty;+\infty)$
Razionale fratta	$y = \frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
Irrazionale	$y = \sqrt[n]{x}, n \geq 2$	$n\ pari \Rightarrow D = [0;\infty)$ $n\ dispari \Rightarrow D = (-\infty;+\infty)$
Trigonometrica	$y = senx \quad y = \cos x$	$D = (-\infty;+\infty)$
	$y = tgx$	$D = \{x \in R \mid x \neq (2k+1)\pi/2, k \in Z\}$
	$y = \cot gx$	$D = \{x \in R \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$
Logaritmica	$y = \log_a x$ con $a \in R, a \neq 1$	$D = (0;+\infty)$
Esponenziale	$y = a^x$ con $a \in R$	$D = (-\infty;+\infty)$
Potenze con esponente irrazionale	$y = x^\alpha$	$D = [0;+\infty)$

Esempio di ricerca del dominio

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Si imposta il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1} \geq 0 \\ n \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

E poi si risolve

FUNZIONE: Rappresentazione

$$y = 3x^2$$

$$y = senx$$

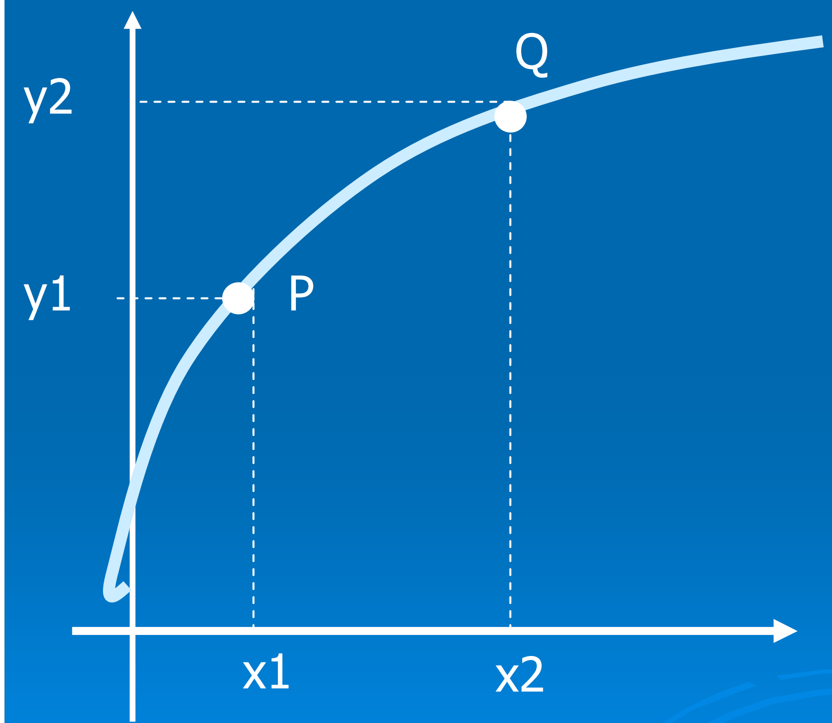
QUESTE SONO FUNZIONI

Una funzione può essere rappresentata tramite un'equazione, in cui x è un elemento del dominio, y la sua immagine.

$$y = \pm\sqrt{x}$$

QUESTA NON E' UNA FUNZIONE PERCHE' NON E' UNIVOCA: AD OGNI VALORE DI X CORRISPONDONO DUE VALORI DI Y

FUNZIONE: Rappresentazione



Una funzione può essere rappresentata tramite il suo grafico, se sia A che B sono sottoinsiemi dei numeri reali: la x di un punto del grafico è un elemento del dominio, la y è la sua immagine

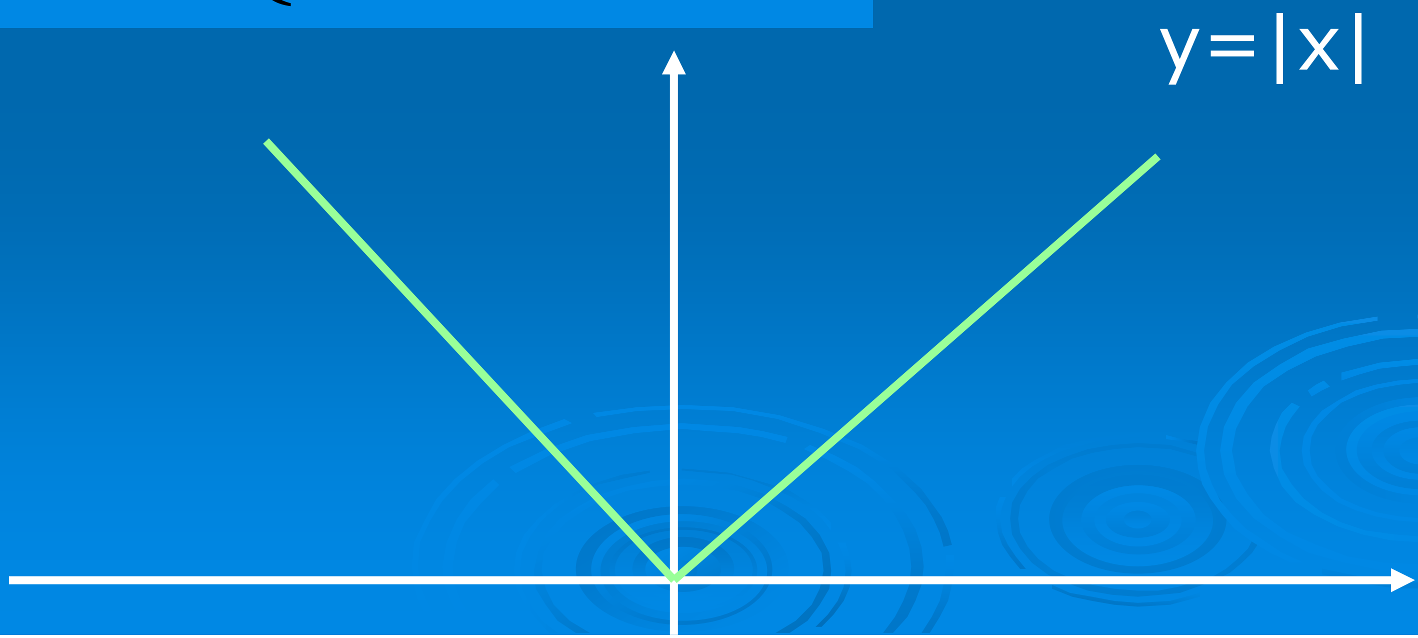
FUNZIONE: Rappresentazione

Una funzione può anche essere definita PER CASI, ovvero può avere formule diverse a seconda del valore di x

FUNZIONE: valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

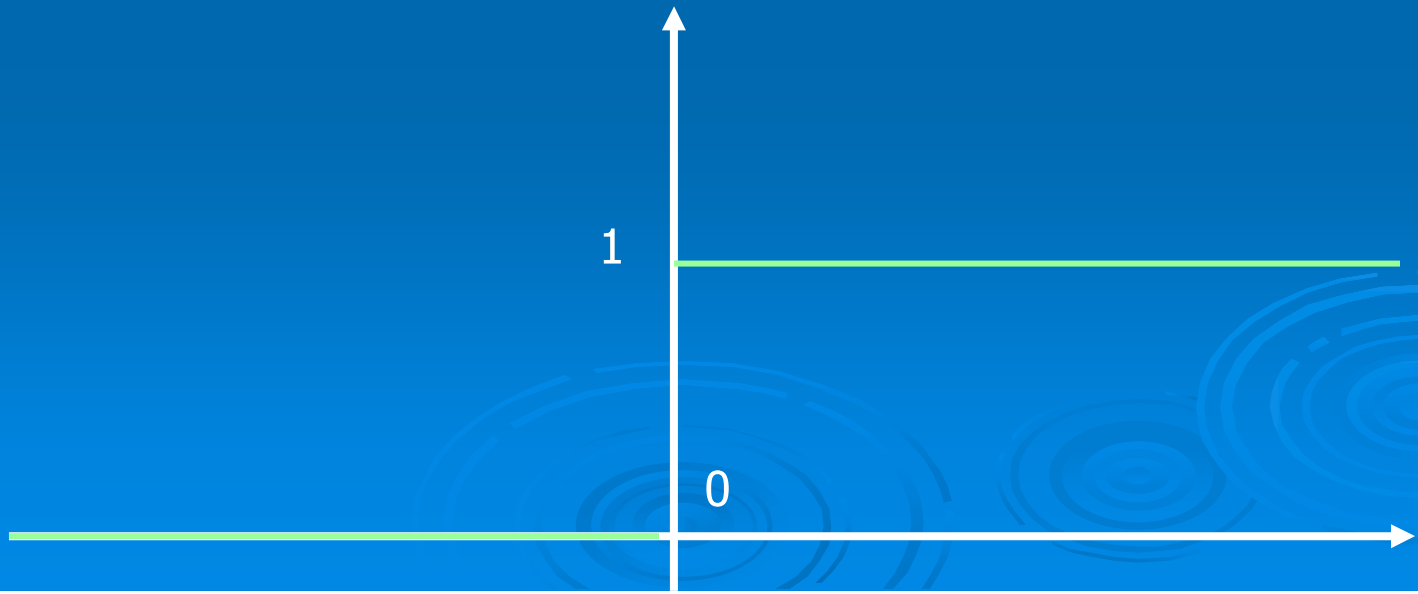
Un esempio è la funzione VALORE ASSOLUTO



FUNZIONE: Heaviside

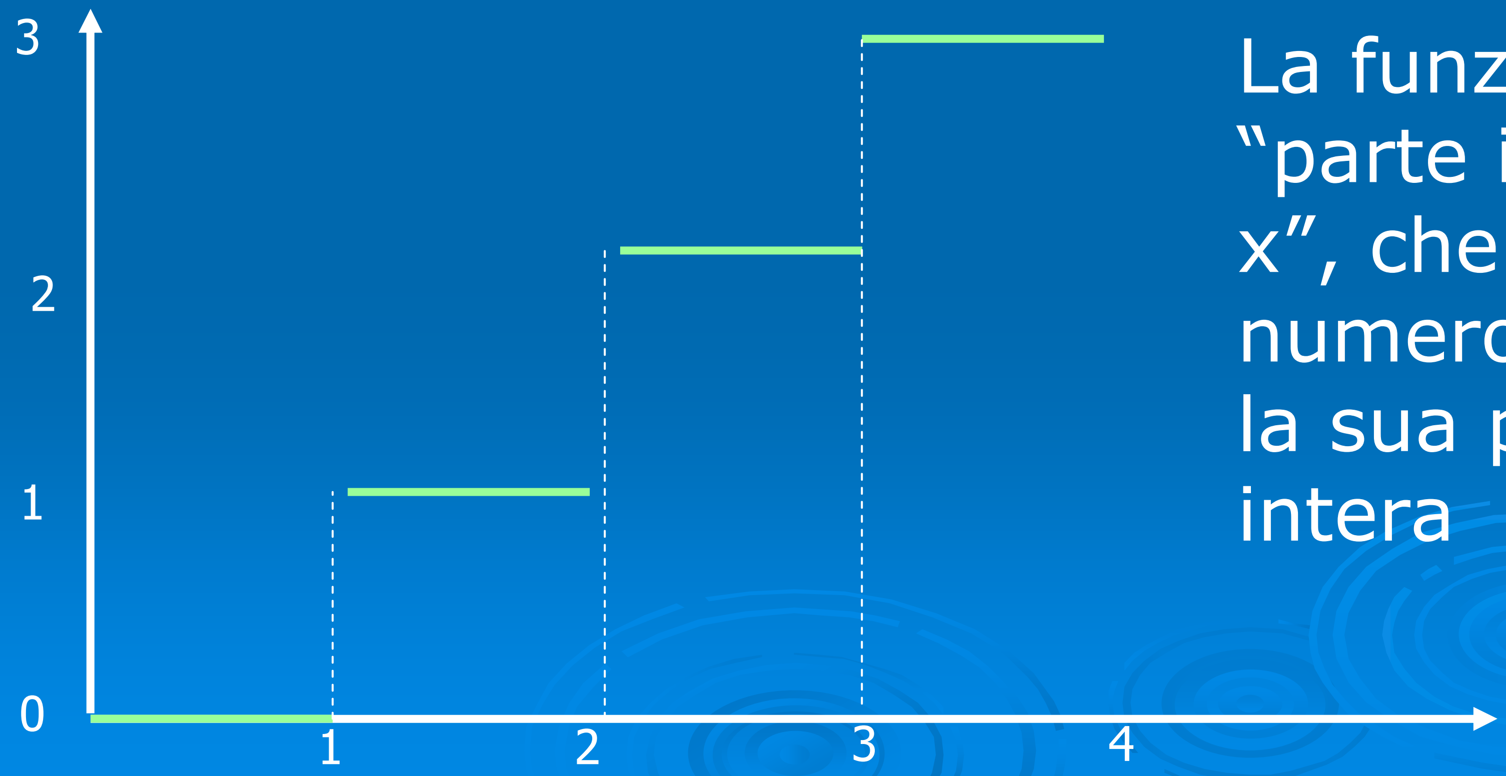
$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Un altro è la funzione di Heaviside o funzione a gradino



FUNZIONE: parte intera

$$INT(x) = n \quad n \leq x < n+1 \quad n \in Z$$



La funzione "parte intera di x", che ad ogni numero associa la sua parte intera

Caratteristiche di una funzione

Positività

Lo studio del segno (o POSITIVITA') di una funzione è uno degli elementi fondamentali per la determinazione del grafico della funzione.
La ricerca della positività della funzione di equazione y=f(x) equivale alla soluzione della disequazione:

$$f(x) \geq 0$$

FUNZIONE: positività

Ad esempio, la funzione di equazione:

$$y = x^3 - 4x$$

È positiva in $-2 \leq x \leq 0$ e $x \geq 2$

FUNZIONE: positività

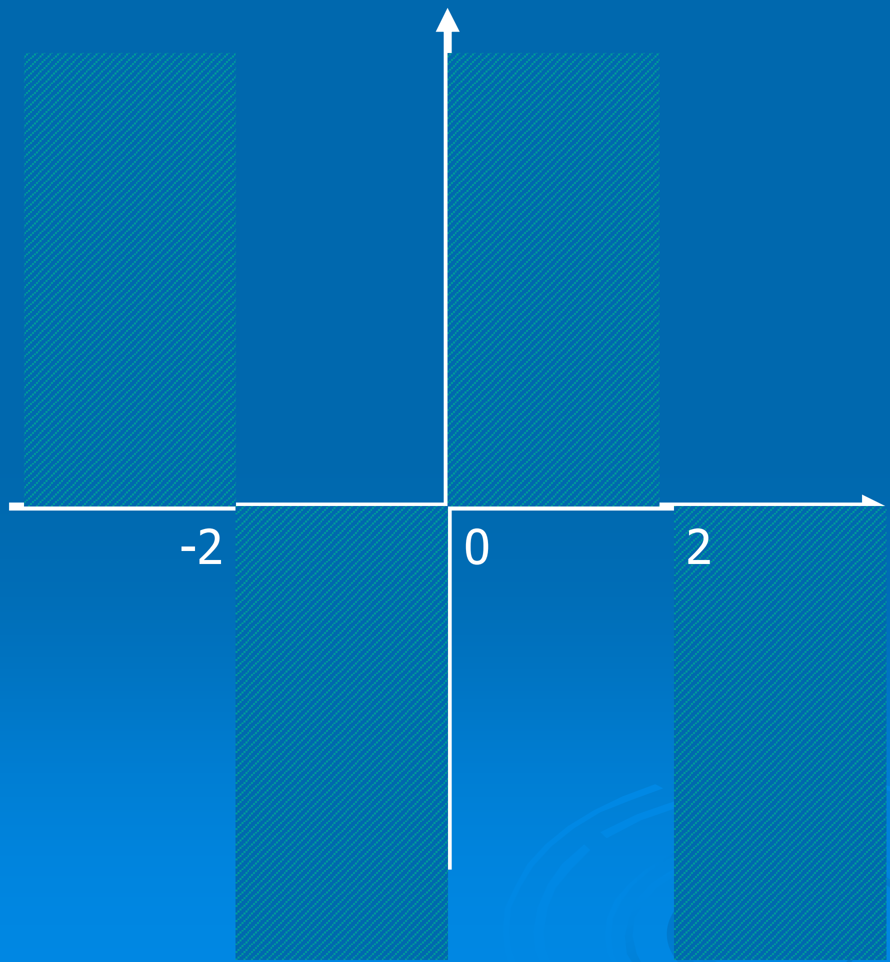
Graficamente la positività corrisponde a quegli intervalli dell’asse x in cui la curva sta <u>al di sopra dell’asse</u>.

Analogamente, la negatività corrisponde ai valori di x in cui la curva sta <u>sotto l’asse</u>

FUNZIONE: positività

La cosa può essere rappresentata cancellando con un tratteggio la parte di piano sotto l'asse x in corrispondenza della positività e sopra l'asse x in corrispondenza della negatività, a indicare che in quelle zone la curva non può esistere

FUNZIONE: positività



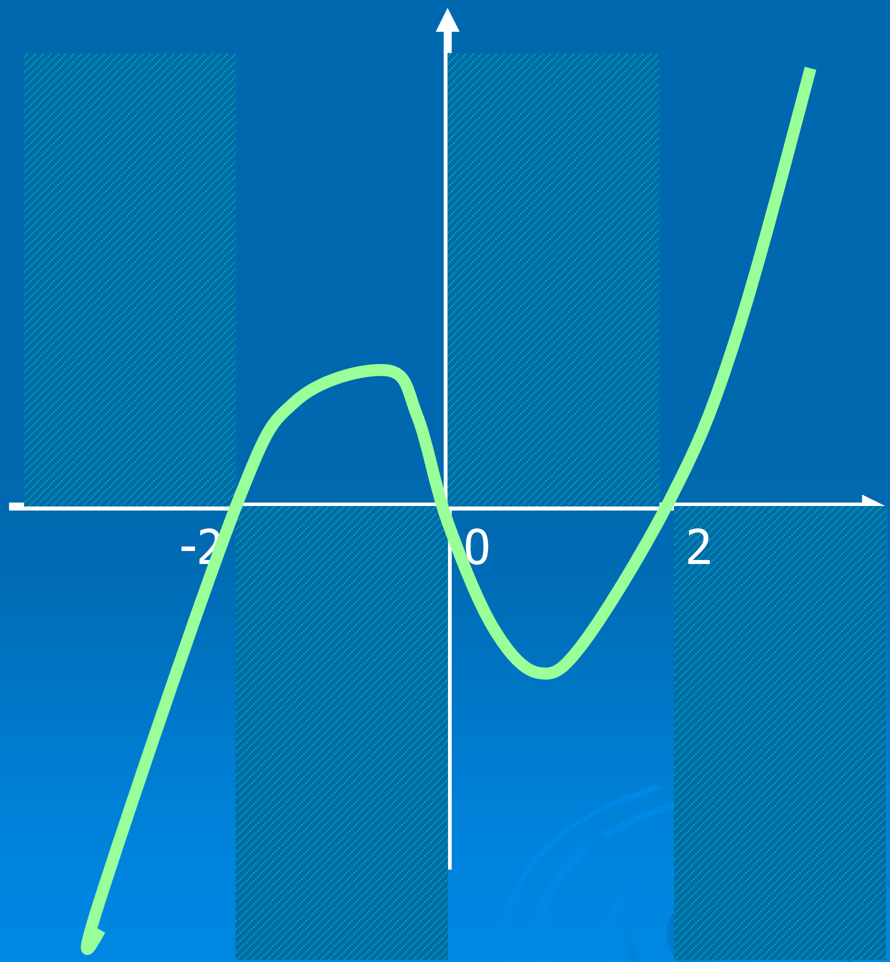
La positività della funzione di esempio

$-2 \leq x \leq 0$

$x \geq 2$

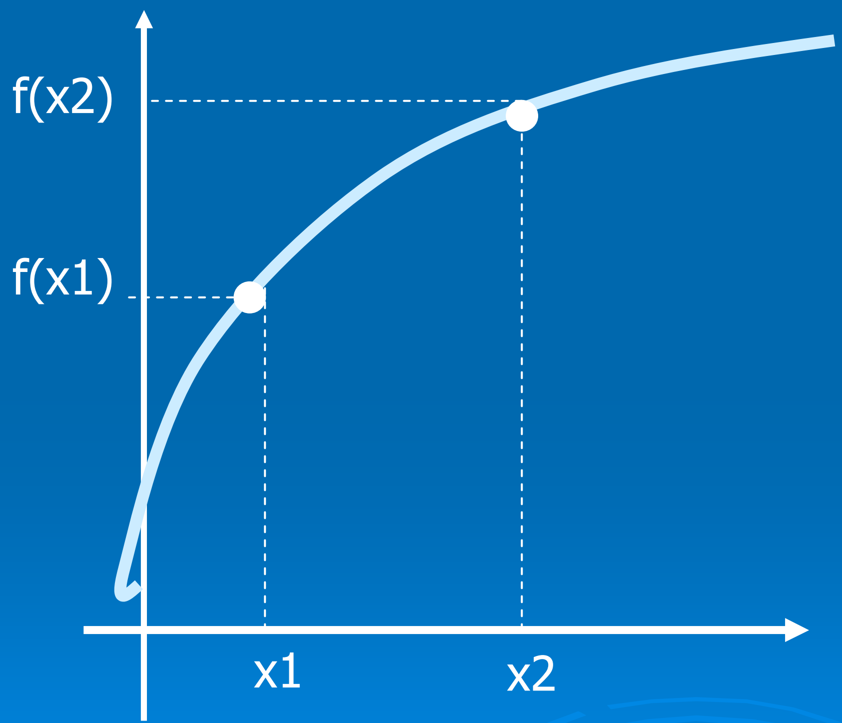
Può essere così rappresentata

FUNZIONE: positività



Questa rappresentazione rende spesso molto facile tracciare il grafico

FUNZIONE: crescente



Intuitivamente, una funzione è CRESCENTE quando, all’aumentare del valore di x, aumenta anche il valore di y

FUNZIONE: crescente

Rigorosamente, una funzione si dice CRESCENTE in un dato intervallo I del dominio se, per ogni coppia di valori x1 e x2 appartenenti ad I, tali che:

$$x_2 > x_1$$

Allora risulta:

$$f(x_2) > f(x_1)$$

FUNZIONE: decrescente

Analogamente, una funzione si dice DECRESCENTE in un dato intervallo I del dominio se, per ogni coppia di valori x1 e x2 appartenenti ad I, tali che:

$$x_2 > x_1$$

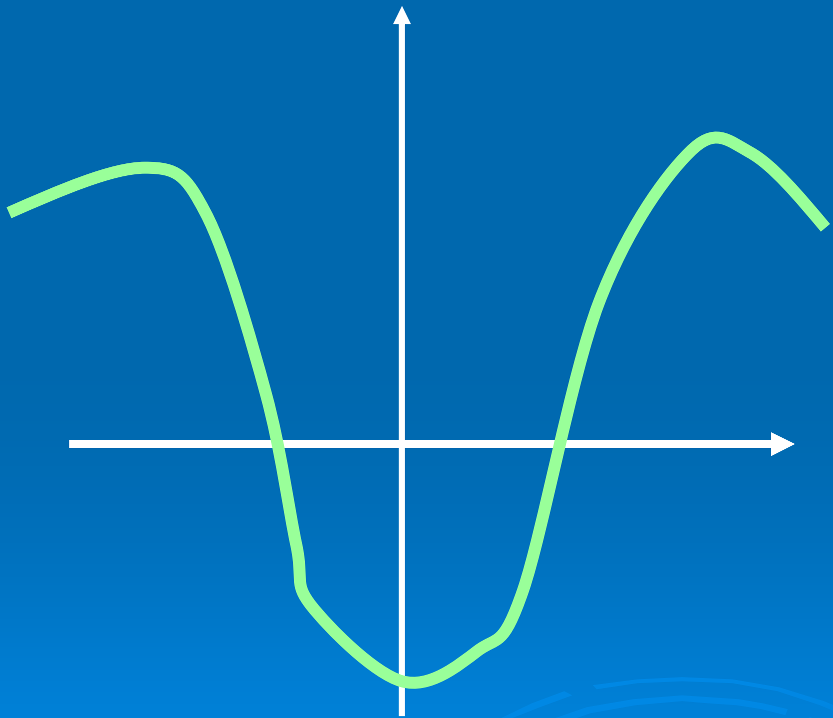
Allora risulta:

$$f(x_2) < f(x_1)$$

FUNZIONE: monotonia

Una funzione che, in un intervallo, risulti o crescente o decrescente, si dice MONOTONA in tale intervallo.

FUNZIONE: pari

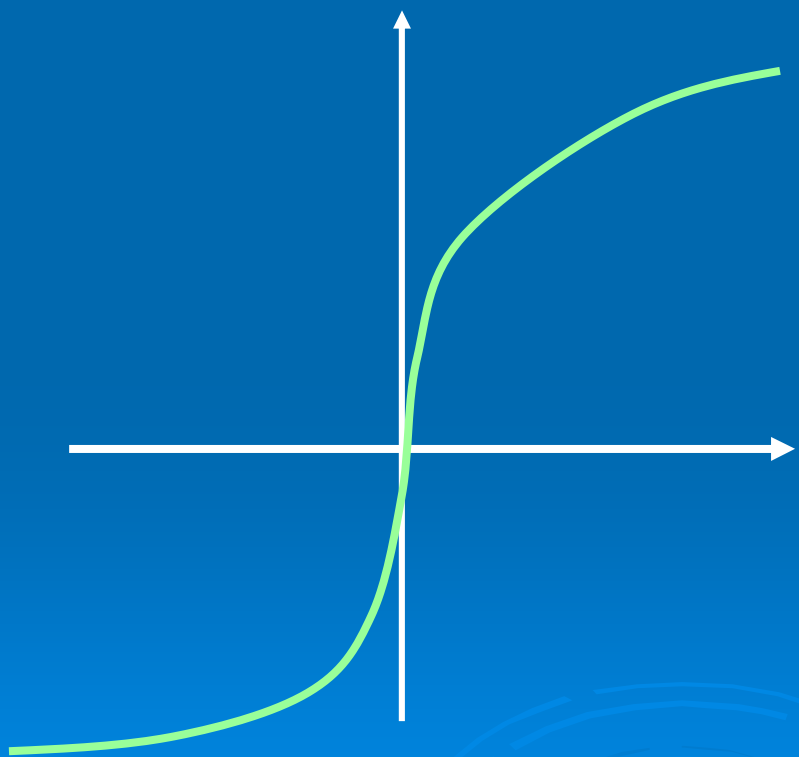


Una funzione si dice PARI se:

$$f(-x) = f(x)$$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y

FUNZIONE: dispari

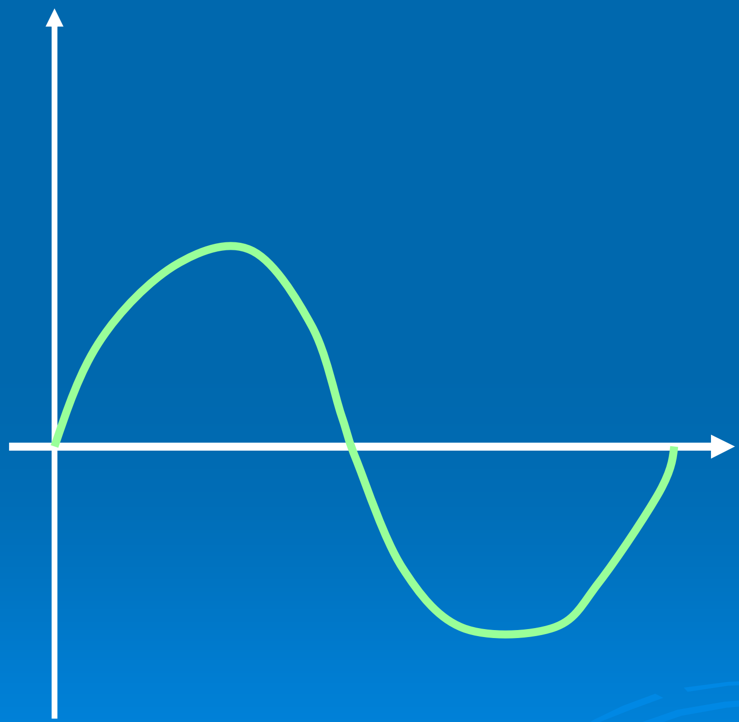


Una funzione si dice DISPARI se:

$$f(-x) = -f(x)$$

Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine

FUNZIONE: periodica

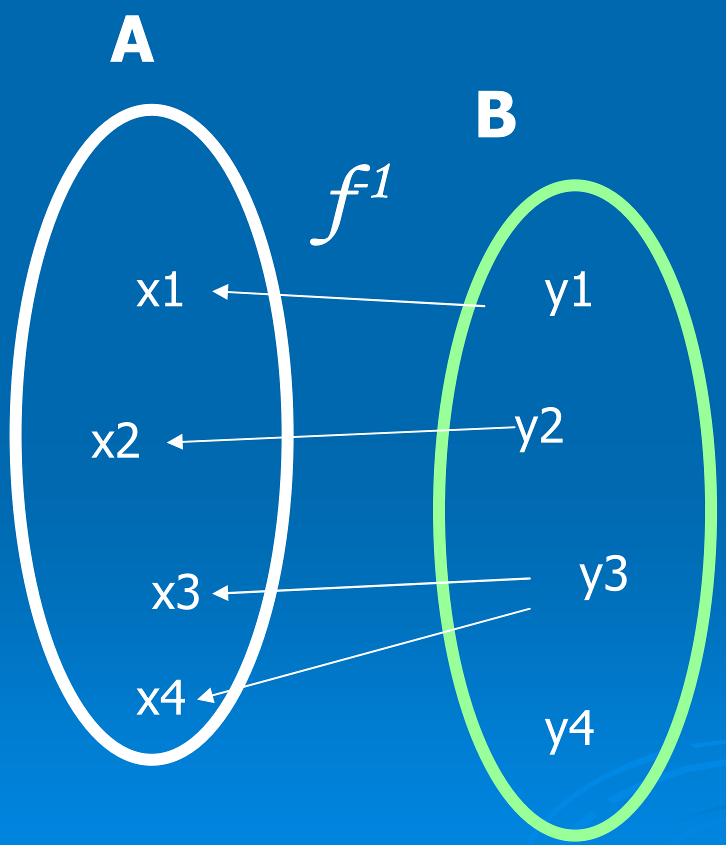


Una funzione si dice PERIODICA se esiste un numero T>0 tale che

$$f(x+T)=f(x)$$

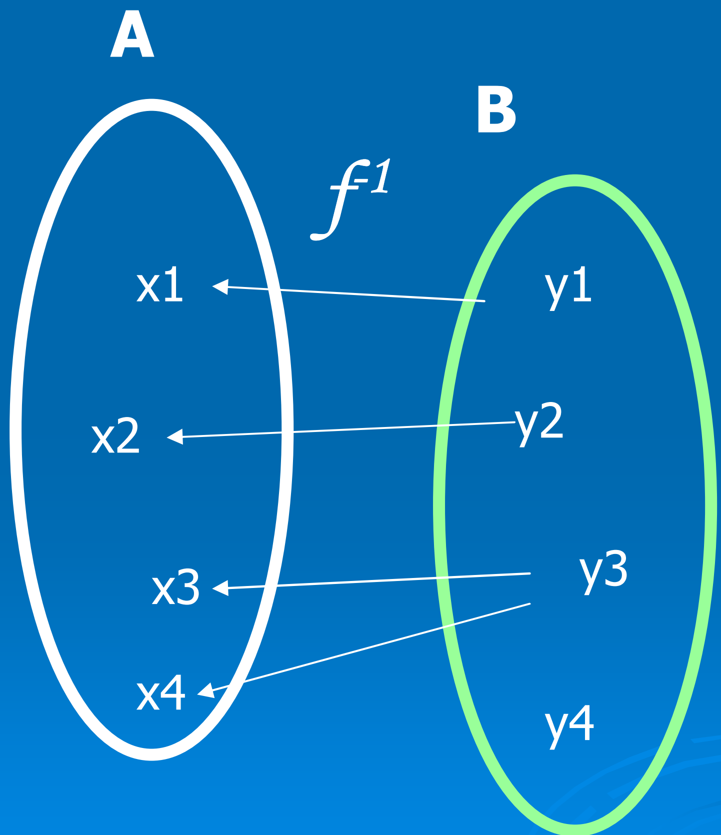
Per ogni x del dominio.
Il minore dei valori di T si dice PERIODO

FUNZIONE: inversa



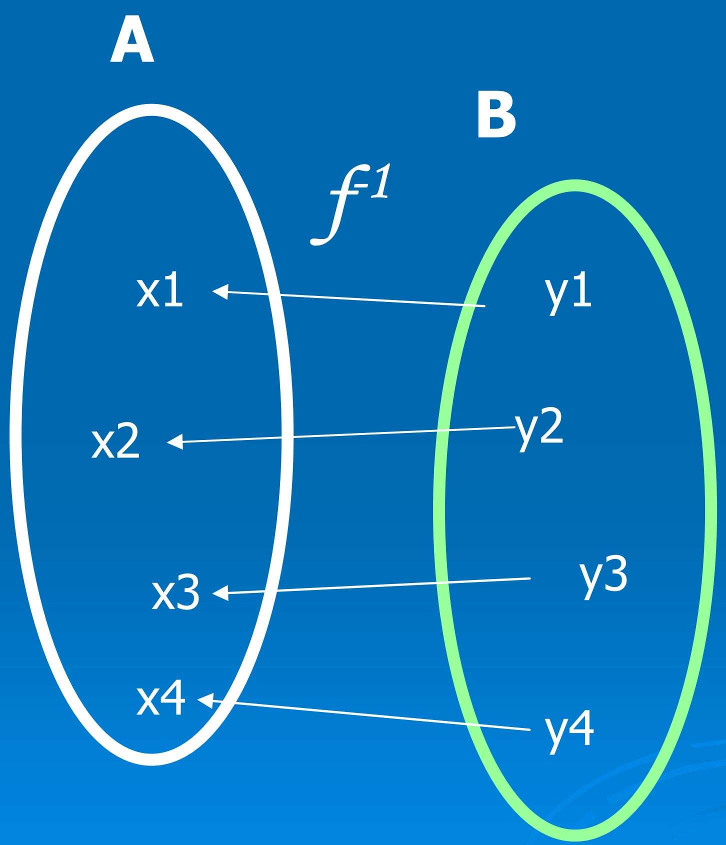
Data una funzione f definita sul dominio A e codominio B, si dice RELAZIONE INVERSA la relazione che ad ogni immagine y di B associa la sua controimmagine x in A

FUNZIONE: inversa



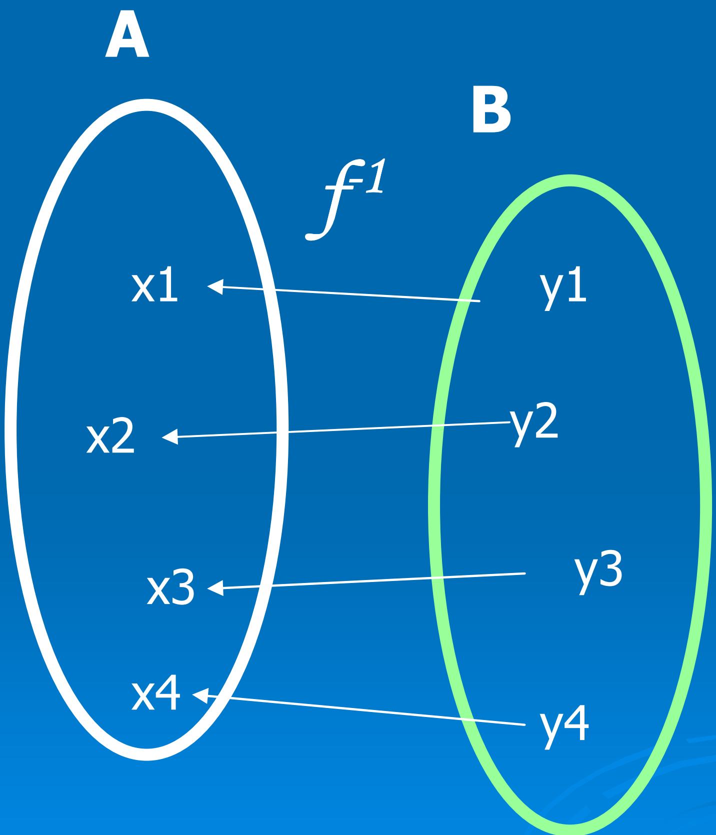
Non e' detto che l'inversa sia una funzione: infatti ad esempio in questo caso non lo è perché non è univoca: a y3 sono associati due elementi, x3 e x4

FUNZIONE: inversa



In questo caso invece anche l'inversa è una funzione, infatti è univoca.

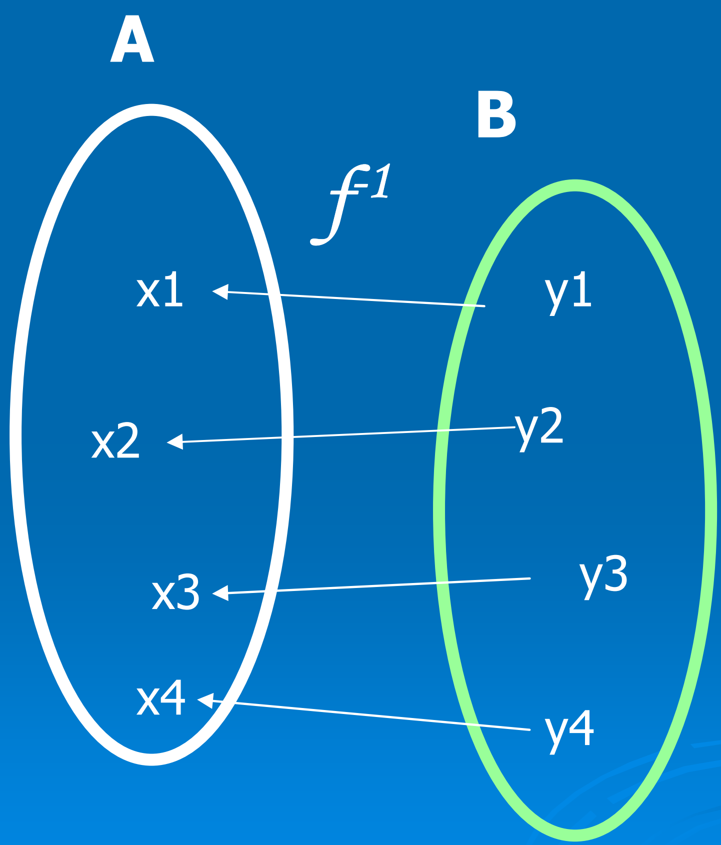
FUNZIONE: funzione invertibile



Quando la relazione inversa è una funzione allora la funzione si dice INVERTIBILE e la sua inversa si dice FUNZIONE INVERSA

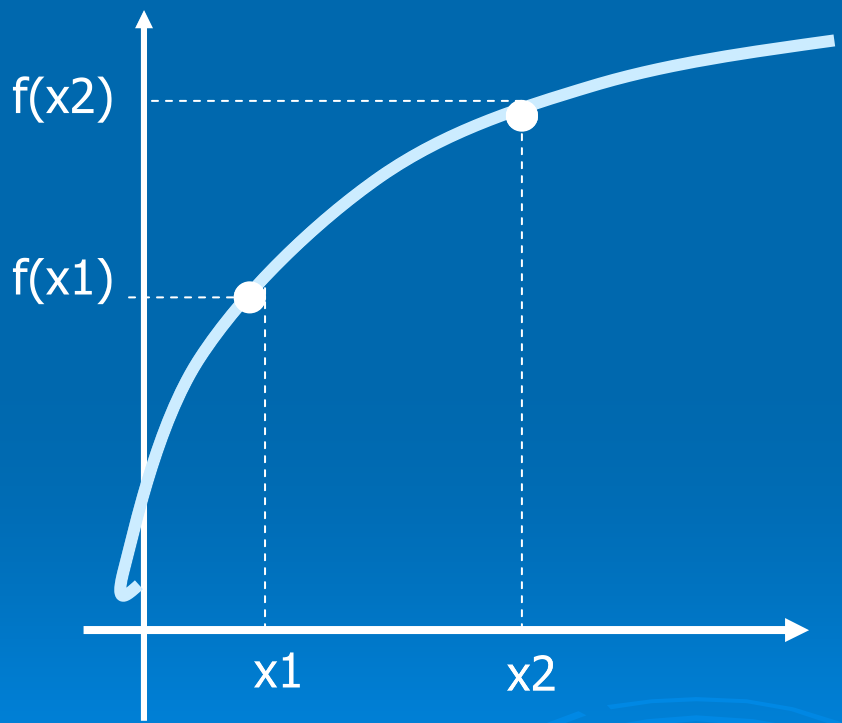
Si usa il simbolo f^{-1}

FUNZIONE: funzione invertibile



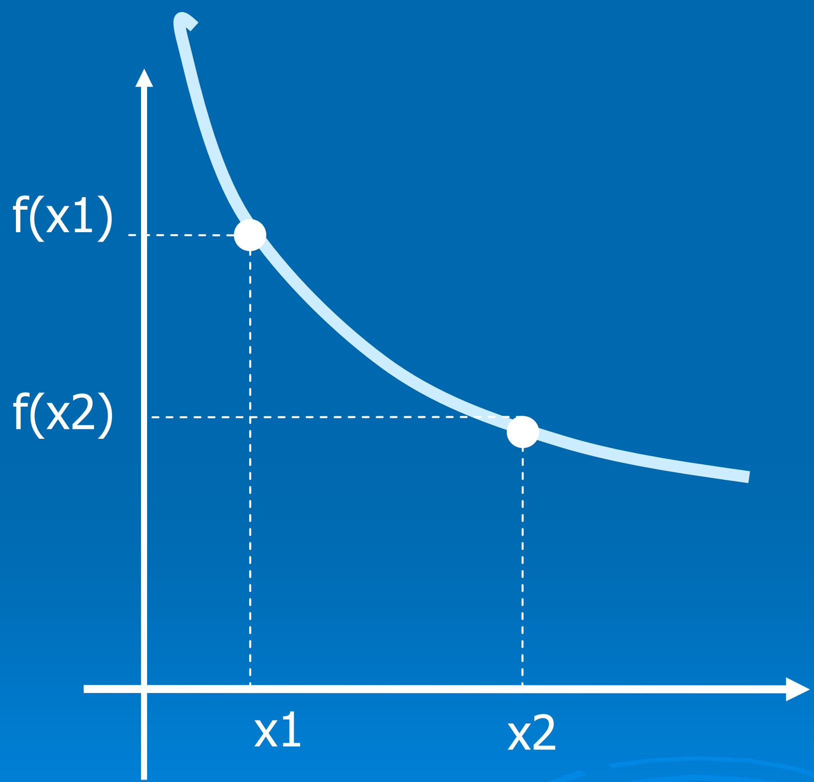
Se una funzione è invertibile allora è univoca da B ad A; ma siccome lo è da A a B per definizione di funzione, allora:
UNA FUNZIONE E' INVERTIBILE SE E SOLO SE E' BIUNIVOCA

FUNZIONE: invertibilità e monotonia



Una funzione crescente sarà anche biunivoca; infatti se x1>x2 allora f(x1)>f(x2), quindi non si verifica mai che assuma due volte lo stesso valore

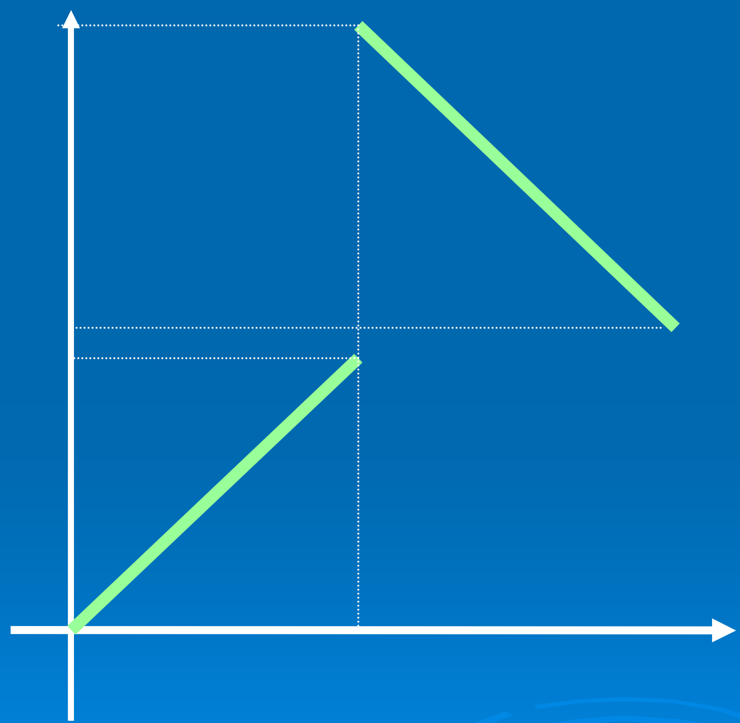
FUNZIONE: invertibilità e monotonia



Lo stesso se la funzione è decrescente. Quindi:

SE UNA FUNZIONE E' MONOTONA ALLORA E' INVERTIBILE

FUNZIONE: invertibilità e monotonia



Non vale il viceversa; la funzione nel grafico non è monotona ma è invertibile; infatti non assume mai due volte lo stesso valore

FUNZIONE: funzione invertibile

Anche se una funzione non è invertibile su tutto il dominio lo può diventare se il dominio viene ristretto.

Ad esempio, la funzione $y=x^2$ non è invertibile, però se ristretta a $x>0$ lo diventa e la sua inversa è la radice quadrata

FUNZIONE: ricerca dell'inversa

La funzione inversa si trova risolvendo l'equazione della funzione:

$$y=f(x)$$

Ovvero trovando x in funzione di y.
Se il risultato è univoco allora la funzione è invertibile.

FUNZIONE: ricerca del codominio

Il codominio di una funzione coincide col dominio dell'inversa. Quindi, per determinare il codominio, si può procedere in questo modo:

- Trovare la relazione inversa
- Determinarne il dominio

FUNZIONE: composte

Sia f una funzione definita su A a valori in B tale che:

$$y_1=f(x_1)$$

E sia g una funzione definita su B a valori in C tale che:

$$z_1=g(y_1)$$

Allora la funzione definita su A a valori in C che all'elemento x_1 di A associa l'elemento z_1 di c si dice FUNZIONE COMPOSTA di f e g

FUNZIONE: composte

La composta si può così indicare

$z=g(f(x))$ oppure $z=g \circ f(x)$