Corso di Analisi Matematica
Successioni e loro limiti

Laurea in Informatica e Comunicazione Digitale
A.A. 2013/2014

Università di Bari

Successioni

- Funzioni di particolare importanza:

Definizione

Una successione è una legge che associa ad ogni elemento di $\mathbb{N}$ un numero reale cioè una funzione reale definita su $\mathbb{N}$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad f(n) = a_n \quad n \mapsto a_n.$$

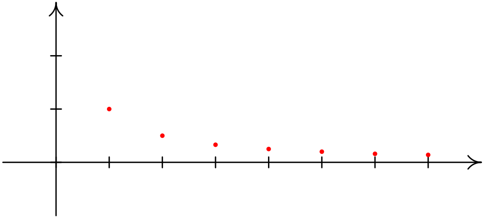
Si denota con

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \{a_n\} \quad a_n \quad n \mapsto a_n.$$

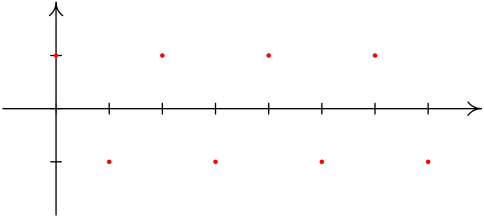
- Spesso le successioni sono definite da un certo intero n_0 in poi, cioè il loro dominio è del tipo $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$. In tal caso si scrive

$$\{a_n\}_{n\geq n_0}.$$

Grafici di successioni:



$$a_n = 1/n$$



$$a_n = (-1)^n$$

Successioni limitate

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ *si dice*

- *limitata inferiormente* *se esiste* $m \in \mathbb{R}$ *tale che, per ogni* n, $a_n \geq m$;
- *limitata superiormente* *se esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che, per ogni* n, $a_n \leq M$;
- *limitata* *se esistono* $m, M \in \mathbb{R}$ *tale che, per ogni* n, $m \leq a_n \leq M$.

L'operazione di limite consente di studiare il comportamento dei numeri a_n quando n diventa sempre più grande.

Limiti di successioni

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ *possiede* *definitivamente* *un proprietà se esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che* a_n *soddisfa quella proprietà per ogni* $n \geq N$.

- Esempi

Successioni convergenti

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ *si dice* *convergente* *se esiste un numero* $l \in \mathbb{R}$ *con questa proprietà: qualunque sia* $\varepsilon > 0$ *risulta definitivamente*

$$|a_n - l| < \varepsilon.$$

In altre parole: per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Limite di una successione

Quindi, se una successione è convergente ad essa è associato un numero l. Si prova che

- l è unico.

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione convergente. Il numero reale l che compare nella definizione precedente si chiama limite della successione $\{a_n\}$. Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

oppure

$$a_n \to l \text{ per } n \to +\infty.$$

Si noti che, dalle proprietà del valore assoluto, la disuguaglianza $|a_n - l| < \varepsilon$ equivale a

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon.$$

Dunque la condizione di convergenza significa che, fissata una striscia orizzontale $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ "comunque stretta", da un certo indice in poi i punti della successione non escono più da questa striscia.

Da questa osservazione risulta che:

- Ogni successione convergente è limitata.

Esempi

Successioni divergenti

Definizione

Sia $\{a_n\}$ *una successione.*

- *Si dice che* $\{a_n\}$ *diverge a* $+\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *si ha* $a_n > M$ *definitivamente e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty;$$

- *si dice che* $\{a_n\}$ *diverge a* $-\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *si ha* $a_n < -M$ *definitivamente e si scrive*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Esempi

- I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri.
- L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con l'aggiunta dei due elementi $+\infty$ e $-\infty$ si indica con $\mathbb{R}^*$:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

- L'operazione di limite ha completamente significato se ambientata in $\mathbb{R}^*$: il limite di una successione, se esiste, è un elemento di $\mathbb{R}^*$.
- Esistono successioni che non sono né convergenti né divergenti (per esempio $\{(-1)^n\}$). Tali successioni si dicono irregolari o indeterminate. Per esse l'operazione di limite non è definita.

Insiemi non limitati

È comodo adottare la convenzione usata per i limiti anche per il $\sup$ e l'$\inf$ di insiemi.

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.

- *Se E non è limitato superiormente si dice che*

$$\sup E = +\infty;$$

- *se E non è limitato inferiormente si dice che*

$$\inf E = -\infty.$$

Infinitesimi e infiniti

Definizione

- *Una successione* $\{a_n\}$ *si dice infinitesima se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

- *Una successione* $\{a_n\}$ *si dice infinita se*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty.$$

Gli infinitesimi (infiniti) non sono numeri ma quantità variabili che tendono a diventare indefinitamente piccole (grandi).

Successioni monotone

Definizione

Una successione $\{a_n\}$ *si dice*

- *monotona crescente se per ogni* n $a_n \leq a_{n+1}$*;*
- *strettamente crescente se per ogni* n $a_n < a_{n+1}$*;*
- *monotona decrescente se per ogni* n $a_n \geq a_{n+1}$*;*
- *strettamente decrescente se per ogni* n $a_n > a_{n+1}$*.*

Esempi

Le successioni monotone non sono mai irregolari.

Limiti di successioni monotone

Teorema

Sia $\{a_n\}$ *una successione monotona.*

- *Se* $\{a_n\}$ *è monotona crescente e superiormente limitata allora* $\{a_n\}$ *è convergente e*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- *Se* $\{a_n\}$ *è monotona decrescente e inferiormente limitata, allora* $\{a_n\}$ *è convergente e*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Limiti di successioni monotone

Corollario

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona.

- *Se $\{a_n\}$ è monotona crescente allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- *Se $\{a_n\}$ è monotona decrescente, allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Il numero di Nepero

Teorema

La successione definita da

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n \geq 1$$

è convergente.

Si prova che $\{a_n\}$ è strettamente crescente e limitata $(2 \leq a_n \leq 4)$.
Si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Il numero di Nepero e è irrazionale e la sua rappresentazione decimale inizia così:

$$2.7182818284\ldots$$

Successione geometrica (di ragione q)

È la successione $\{q^n\}$, per un fissato $q \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1; \\ 1 & \text{se } q = 1; \\ 0 & \text{se } |q| < 1; \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$

Se $q > 1$, $\{q^n\}$ è monotona crescente, illimitata superiormente.
Se $q = 1$, $\{q^n\}$ è costante.
Se $0 < q < 1$, $\{q^n\}$ è monotona decrescente.
Se $q < 0$, $\{q^n\}$ non è monotona.

Limiti e operazioni

Teorema (Algebra dei limiti)

Se $a_n \to a$, $b_n \to b$, *con* $a, b \in \mathbb{R}$ *allora*

$$\begin{aligned} a_n \pm b_n &\to a \pm b \\ K a_n &\to K a \qquad \text{per ogni } K \in \mathbb{R} \\ a_n \cdot b_n &\to a \cdot b \\ \frac{a_n}{b_n} &\to \frac{a}{b} \qquad (b_n, b \neq 0). \end{aligned}$$

Limiti e ordinamento

Teorema (Permanenza del segno, prima forma)

- *Se* $a_n \to a$ *e* $a > 0$ *allora*

$$a_n > 0 \text{ definitivamente.}$$

- *Se* $a_n \to a$ *e* $a < 0$ *allora*

$$a_n < 0 \text{ definitivamente.}$$

Limiti e ordinamento

Teorema (Permanenza del segno, seconda forma)

Se $a_n \to a$ *e* $a_n \geq 0$ *definitivamente allora risulta* $a \geq 0$.

Se $a_n \to a$, $b_n \to b$ *e* $a_n \geq b_n$ *definitivamente allora risulta* $a \geq b$.

Limiti e ordinamento

Teorema (del confronto)

Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ *definitivamente ed esiste* $l \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$a_n \to l,\ c_n \to l$$

allora anche

$$b_n \to l.$$

Corollario

- *Se* $|b_n| \leq c_n$ *definitivamente e* $c_n \to 0$ *allora anche* $b_n \to 0$.
- *Se* $c_n \to 0$ *e* b_n *è limitata* $b_n \cdot c_n \to 0$.

Esempi

Si dimostra che:

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0; \\ 1 & \text{se } \alpha = 0; \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Applicazione: limiti di successioni che sono scritte come rapporto tra due successioni, ciascuna costituita da somme di potenze di n.

Estensione delle operazioni con i limiti

Casi in cui i limiti sono $+\infty$ o $-\infty$.

- $a + \infty = +\infty \qquad a - \infty = -\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty \qquad -\infty - \infty = -\infty$

Se $a \neq 0$,

- $a \cdot \infty = \infty \qquad \dfrac{a}{0} = \infty$

(ove il segno di ∞ va determinato con la usuale regola dei segni)

- $\dfrac{a}{\infty} = 0$

Si noti che mancano le regole relative alle espressioni

$$+\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

che, per tale motivo, prendono il nome di forme di indecisione.

Confronti e stime asintotiche

È utile saper confrontare due successioni entrambe infinite o entrambe infinitesime per capire quale delle due tenda "più rapidamente" all'infinito o a 0.

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Consideriamo il limite del loro rapporto. Si hanno le seguenti possibilità:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 \\ l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \pm\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

Confronto tra infiniti

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infiniti, si dice che

- $\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore a $\{b_n\}$ se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0;$$
- $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
- $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore a $\{b_n\}$ se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty;$$
- $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili se il limite del loro rapporto non esiste.

Confronto tra infinitesimi

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due infinitesimi, si dice che

- $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$ se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0;$$
- $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello stesso ordine se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$
- $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $\{b_n\}$ se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \pm\infty;$$
- $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili se il limite del loro rapporto non esiste.

Successioni asintotiche

Definizione

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successioni. Se*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

si dice che $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *sono asintotiche e si scrive*

$$a_n \sim b_n.$$

Proprietà delle successioni asintotiche

Proposizione

- *Se* $a_n \sim b_n$ *allora* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *hanno lo stesso comportamento: o convergono allo stesso limite o divergono o entrambe non hanno limite.*
- *Se* $a_n \sim b_n \sim \ldots \sim c_n$ *allora* $a_n \sim c_n$.
- *Se* $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$, $c_n \sim c'_n$ *allora*

$$\frac{a_n b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n b'_n}{c'_n}.$$

Osserviamo inoltre che

$$a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n \cdot c_n \text{ con } c_n \to 1$$

Esempio di successioni che non sono asintotiche a $\{n^\alpha\}$ per nessun $\alpha > 0$:

Proposizione

Per ogni $a > 1$, $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Questi limiti descrivono la "velocità" con cui i logaritmi (con base > 1), le potenze, gli esponenziali (con base > 1) vanno all'∞:

- i logaritmi più lentamente di qualsiasi potenza;
- le potenze più lentamente di qualsiasi esponenziale.